ÉDUCATION MATHÉMATIQUE & CITOYENNETÉ

1. L'École et les citoyens

1.1. L'origine de la notion de ***citoyen*** se trouve dans l'expérience grecque de la ***démocratie***. La Cité grecque rassemble des « semblables » (*homoioi*) qui sont, abstraitement, des « égaux » (*isoi*). Dans un ouvrage fondamental, *Les origines de la pensée grecque* [1], l'helléniste Jean-Pierre Vernant apporte à ce propos le commentaire suivant :

> En dépit de tout ce qui les oppose dans le concret de la vie sociale, les citoyens se conçoivent, sur le plan politique, comme des unités interchangeables à l'intérieur d'un système dont la loi est l'équilibre, la norme l'égalité. Cette image du monde humain trouvera au VIe siècle son expression rigoureuse dans un concept, celui d'*isonomia* : égale participation de tous les citoyens à l'exercice du pouvoir.

1.2. Le passage de l'individu concret au citoyen va de pair avec une révolution cruciale dans l'organisation politique, sans laquelle l'idée de citoyen ne serait pas ce qu'elle est : le citoyen grec obéit, non pas à un homme, mais aux ***lois*** qu'il a concouru à établir. C'est ce qu'explique Dominique Schnapper dans le passage suivant de son livre *Qu'est-ce que la citoyenneté ?* [2] :

> Les Grecs n'ont pas seulement inventé l'idée de citoyen qui ne se confond pas avec l'individu concret ou, en d'autres termes, l'idée d'un domaine politique distinct de la société formée par les liens des hommes concrets, ils ont inventé le principe de l'État de droit. La *polis* était, pour les Grecs, fondamentalement différente des empires des Barbares, parce que les citoyens n'obéissaient pas à un homme, si puissant fût-il, mais aux lois. Condamné à mort, Socrate refusa de s'enfuir pour manifester son respect des lois de la Cité, même quand elles étaient appliquées injustement.

1.3. Le citoyen a des droits, qui sont aussi des devoirs : on appelle ***civisme***, précisément, « l'exercice du respect à l'égard de la République et de ses lois [3] ». Dans *Du contrat social* (1762), Jean-Jacques Rousseau vitupère ainsi sévèrement certaines formes de désengagement des citoyens à l'endroit des affaires publiques :

> Sitôt que le service public cesse d'être la principale affaire des Citoyens, et qu'ils aiment mieux servir de leur bourse que de leur personne, l'État est déjà près de sa ruine. Faut-il marcher au combat ? ils payent des troupes et restent chez eux ; faut-il aller au Conseil ? ils nomment des députés et restent chez eux. À force de paresse et d'argent ils ont enfin des soldats pour asservir la patrie et des représentants pour la vendre.

1.4. Les ***droits du citoyen*** vont au-delà des ***droits de l'homme*** : selon une formule du constitutionnaliste Jean Rivero, « les droits de l'homme sont des libertés, les droits du citoyen sont des pouvoirs [4] ». Le problème des ***conditions de possibilité de l'exercice effectif*** de ces pouvoirs est posé par la Révolution française et reçoit une solution de principe à travers la création de ***l'école de la République*** – l'École. Ce que D. Schnapper explicite ainsi [5] :

> … l'éducation est au cœur du projet démocratique. Les citoyens doivent disposer des moyens nécessaires pour exercer *concrètement* leurs droits. C'est ce qui fonde l'idéologie et le rôle de l'École dans la société des citoyens : elle doit donner à tous les capacités nécessaires pour participer réellement à la vie publique.
>
> L'École, qu'elle soit directement organisée par l'État ou contrôlée par lui, est sans doute l'institution de la citoyenneté par excellence. Dans la démocratie grecque de l'Antiquité, l'absence d'école publique limitait la participation politique réelle aux citoyens riches : l'idée que chaque citoyen doit pouvoir exercer concrètement ses droits est liée à la démocratie moderne. C'est à partir de la Révolution que les maîtres d'école, en France, cessèrent d'être appelés des « régents », pour devenir des « instituteurs », parce qu'ils étaient désormais chargés d'instituer la « nation », au sens de l'article 3 de la Déclaration des droits de l'homme et du citoyen, source de la légitimité politique. Plus directement que dans d'autres pays, l'École est, en France, l'école du citoyen.

---

[1] PUF, 1962, p. 36.

[2] Gallimard, 2000, p. 13.

[3] On trouvera sur le site Internet de l'IUFM d'Aix-Marseille une notice éclairante sur la notion du civisme (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/ecjs/productionsaix/civisme.htm).

[4] *Libertés publiques*, PUF, 1995, t. 2, p. 54.

[5] *Op. cit.*, p. 154. La Déclaration des droits de l'homme et du citoyen évoquée ici est celle du 26 août 1789, dont l'article 3 énonce : « Le principe de toute souveraineté réside essentiellement dans la nation. Nul corps, nul individu ne peut exercer d'autorité qui n'en émane expressément. »

1.5. Pour user d'une formulation employée par Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794), dans son *Éloge de M. Franklin* (1789), il s'agit donc d'« éclairer les hommes pour en faire des citoyens ». L'« institution » du citoyen, de la République et de son École s'opère d'un même mouvement, réglé par les principes « fondateurs de l'esprit libre et éclairé, soucieux du vrai [6] », qui doivent guider le développement de l'***« art social »*** que Condorcet appelle de ses vœux [7].

1.5.1. Le principe de ***perfectibilité*** [8] conduit à « rompre avec tout providentialisme ou toute prédestination » et doit se traduire, au prix de ***risques calculés***, en ***perfectionnements concrets.*** Dans le premier de ses cinq *Mémoires sur l'instruction publique* (1791), Condorcet note ainsi :

> … le but de l'éducation ne peut plus être de consacrer les opinions établies, mais, au contraire, de les soumettre à l'examen libre des générations successives, toujours de plus en plus éclairées.

1.5.2. Le principe de ***collégialité*** énonce que les hommes doivent rechercher la vérité ***ensemble***, en évitant les deux écueils solidaires de l'***égalitarisme*** (entendu comme la négation de la diversité des individus concrets) et de l'***élitisme*** (qui nie autrement l'égale dignité des hommes), au profit d'une dynamique de perfectionnement, fruit de l'effort collégial d'un ensemble de citoyens.

1.5.3. Le principe de ***rationalité*** guide l'effort d'intelligibilité du monde naturel et social dans la « guerre de la raison contre les préjugés ». Contre l'opportunisme et le dogmatisme de ceux qui assignent le premier rôle soit à la vertu, soit à l'enthousiasme, Condorcet martèle : « il faut tout examiner, tout discuter, tout enseigner même ». Seule une rationalité elle-même perfectible peut, loin de tout « esprit de système », mais dans un « esprit systématique », présider au devenir « des peuples vraiment libres ».

1.5.4. Le principe de ***laïcité*** [9] vise à substituer à quelque « esprit de secte » que ce soit le seul « esprit public ». Cette exigence conduit à l'affirmation de l'indépendance de l'École par rapport à toute sujétion partisane. Dans son *Rapport et projet de décret sur l'organisation générale de l'instruction publique* (présenté à l'Assemblée nationale les 20 et 21 avril 1792), Condorcet conclut :

> L'indépendance de l'instruction publique fait en quelque sorte une partie des droits de l'espèce humaine.

Et il note encore :

> Après avoir affranchi l'instruction de toute espèce d'autorité, gardons-nous de l'assujettir à l'opinion commune : elle doit la dénoncer, la corriger, la former et non la conduire et lui obéir.

« L'École de la République, souligne Charles Coutel [10], est une École du jugement : il s'agit de confronter les faits et les situations à des lois universelles, de situer les objets dans la nature, les énoncés dans les théories et les événements dans les processus historiques. »

1.5.5. Le principe d'***humanité*** est le dernier des cinq principes retenus. Charles Coutel le commente en ces termes [11] :

> L'amour de l'humanité est l'horizon éthique de la citoyenneté condorcétienne. Cet amour ouvre les grands principes précédents vers l'universalité, dont le sentiment de fraternité serait l'aspect affectif. […] Cette amplification humaniste a deux conséquences pour l'institution du citoyen : tout d'abord, dans l'Instruction publique, chaque enfant ne sera pas considéré d'abord comme « futur citoyen » et *a fortiori* comme « petit soldat » mais comme un « petit d'homme », candidat à l'humanité. Ensuite, les droits de l'homme et l'exercice des droits politiques auront l'humanité comme horizon et non la seule patrie (l'identification complète entre la nationalité et la citoyenneté est étrangère à Condorcet).

Le principe d'humanité ordonne une dialectique du même et de l'autre qui, en rompant avec toutes les formes de narcissisme naïf ou cynique, institue la République. L'estime de soi, par exemple, devient alors ***amour de l'humanité en soi-même***.

---

[6] Charles Coutel, *Condorcet. Instituer le citoyen*, Michalon, 1999, p. 16.

[7] « Nous avons regardé l'art social, écrit Condorcet, comme une véritable science fondée […] sur des faits, sur des expériences, sur des raisonnements et sur des calculs […] susceptibles d'un développement infini. » Dans ce qui suit, nous empruntons l'essentiel à l'ouvrage déjà cité de Charles Coutel.

[8] Le terme est alors nouveau : il apparaît dans le *Discours sur l'origine de l'inégalité* de J.-J. Rousseau, publié en 1755.

[9] Le grec *laos*, à l'origine du mot « laïcité », signifie « peuple », « gens », « citoyens ».

[10] *Op. cit.*, pp. 58-59.

[11] *Ibid.*, pp. 28-29.

1.6. La construction de la citoyenneté est un processus toujours inachevé. Pour ne prendre ici qu'un exemple, le droit de vote, prévu dans son principe par la constitution du 24 juin 1793, mais non appliqué, fut établi pour les hommes (y compris les domestiques…) par la proclamation, le 2 mars 1848, du suffrage « universel » (masculin) [12]. Mais l'extension de ce principe aux femmes, adoptée quatre fois par la Chambre des députés entre 1919 et 1936 (par 488 voix contre une en 1936) et chaque fois rejetée par le Sénat, devra attendre l'ordonnance du 21 avril 1944 prise à Alger par le Comité français de Libération nationale [13]. En 1936, trois femmes deviennent membres du nouveau gouvernement issu des élections législatives (qui avaient donné la victoire au Front Populaire) : elles n'ont pourtant pas le droit de vote ! « Trois hirondelles ne font pas le printemps [14] », commentera la militante féministe Louise Weiss (1893-1983). Les femmes ne voteront pour la première fois qu'aux élections municipales du 29 avril 1945.

2. Mathématiques et citoyenneté : ce que disent les textes officiels

2.1. Que disent les textes gouvernant l'enseignement secondaire des mathématiques en matière de citoyenneté ? Le document d'accompagnement du programme du cycle central du collège précise ceci [15] :

> Le professeur de mathématiques peut participer à la formation du citoyen dans l'exercice même de ses fonctions, sans avoir, pour ce faire, besoin de lancer ses élèves dans des activités qui s'écarteraient par trop de sa discipline d'enseignement.

Mais quelle peut être la contribution propre des mathématiques à la formation du citoyen ? Un premier élément de réponse apparaît essentiel, même si, bien sûr, il n'est pas entièrement spécifique à la classe de mathématiques : il s'agit de la formation de l'élève à la ***« démarche scientifique »***, notamment dans sa dimension ***critique***, ainsi qu'il apparaît dans l'***Introduction générale pour le collège*** relative à l'enseignement des mathématiques :

> Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen.

Ce point de vue est souligné encore par ce passage du programme du cycle central du collège :

> La démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves et concourt à celle de citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

À ce point de vue fait écho le programme de 3^{e} :

> Comme dans les classes antérieures, la démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves, et concourt à celle du citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, et en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

---

[12] « Le gouvernement provisoire [de la II^{e} république] arrête en principe et à l'unanimité que le suffrage sera universel et direct sans la moindre condition de cens. » Notons toutefois que le droit de vote ne sera jamais accordé pleinement aux « indigènes » des colonies de la France : sur cette question complexe et douloureuse, voir Dominique Colas, *Citoyenneté et nationalité* (Gallimard, 2004).

[13] Cette ordonnance prévoyait, dans son article 1er, la convocation d'une Assemblée nationale constituante « élue par tous les Français et Françaises majeurs », tandis qu'un autre article précisait que les femmes, comme les hommes, étaient électrices et éligibles.

[14] Il s'agissait de la radicale Cécile Brunschvicg, présidente de l'Union française pour le suffrage des femmes, nommée sous-secrétaire d'État à l'Éducation nationale, de la socialiste Suzanne Lacore, nommée sous-secrétaire d'État à la protection de l'enfance, enfin de la lauréate du prix Nobel de chimie 1935, Irène Joliot-Curie, nommée sous-secrétaire d'État à la Recherche scientifique.

[15] La classe de mathématiques est présentée par ce même document comme devant contribuer à d'autres aspects encore de la formation du collégien : « L'enseignement des mathématiques, y lit-on ainsi, peut apporter une contribution à ces différents aspects de la formation que sont l'éducation à la citoyenneté, l'éducation à l'orientation, l'éducation à l'environnement. (Quand, ici, il est question d'environnement, il s'agit aussi bien d'environnement socio-économique que d'environnement culturel ou d'environnement naturel.) »

2.2. Constitutive par excellence d'une citoyenneté active, la capacité clé consiste à ***interroger le monde*** naturel et social, à ***soulever des questions*** à son propos, à ***tenter d'y répondre*** d'une manière bien contrôlée. Ce que le document d'accompagnement du programme du cycle central formule dans les termes suivants :

> Les mathématiques, école de rigueur, sont aussi une discipline qui apprend à se poser des questions. Et répondre ne pourra résulter de pétitions de principe ou d'arguments d'autorité, mais obligera à énoncer ses présupposés, à justifier les traitements entrepris et les résultats atteints. Pour la formation du citoyen, de telles attitudes sont fondamentales.

2.3. La dialectique entre ***questions*** mathématiques ou extramathématiques ***à étudier*** et ***savoirs*** mathématiques construits ou à construire en tant qu'***outils d'étude*** est au cœur de la formation à une telle citoyenneté éclairée (et éclairante). Le programme de 6^{e} précise ainsi que l'enseignement des mathématiques en classe de sixième vise notamment à « développer la capacité à utiliser les outils mathématiques dans différents domaines (vie courante, autres disciplines) » et ajoute :

> Pour cela, la démarche d'apprentissage vise à bâtir les connaissances mathématiques à partir de problèmes rencontrés dans d'autres disciplines ou issus des mathématiques elles-mêmes. En retour, les savoirs mathématiques doivent être utilisables dans des spécialités diverses, ce qui contribue à faire prendre conscience de la cohérence des savoirs et de leur intérêt mutuel et favorise la prise en compte par les élèves à la fois du caractère d'« outil » des mathématiques et de leur développement comme science autonome.

Cette démarche, y lit-on encore, « renforce également la formation intellectuelle de l'élève, développe ses capacités de travail personnel (individuellement et en équipes) et concourt à la formation du citoyen. »

2.4. Le document d'accompagnement du programme de 3^{e} reprend autrement ce point, en insistant sur l'effort de ***synthèse*** qui doit aller de pair avec le travail concret sur telle ou telle question étudiée :

> Au terme d'un exercice, amener l'élève à en dégager l'intérêt – le type de problème qui a été résolu, le résultat qui a été établi –, à situer l'exercice dans la progression du cours, et plus généralement dans l'ensemble des connaissances acquises au collège, est particulièrement formateur : cela permet d'avoir une vision globale des questions abordées en mathématiques et dans certains cas de leurs liens avec d'autres disciplines. Ainsi l'enseignement des mathématiques contribue pour une bonne part à la formation générale des collégiens et à leur formation de futur citoyen.

2.5. Les programmes de mathématiques présentent de manière insistante le domaine de l'organisation et de la gestion de données – soit en gros le domaine de la ***statistique***, tel qu'il se met en place au collège –, comme le lieu par excellence de la formation mathématique à la citoyenneté. Un passage du programme de 3^{e} justifie en partie cette insistance dans les termes suivants :

> L'éducation mathématique rejoint ici l'éducation du citoyen : prendre l'habitude de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique et donc sur la perte d'information, sur les possibilités de généralisation, sur les risques d'erreurs d'interprétation et sur leurs conséquences possibles.

Les programmes des autres classes ne sont pas en reste, comme le montre le florilège d'extraits ci-après, où l'on notera tout particulièrement la référence répétée aux « autres disciplines » :

> 1. « Les trois parties de cette rubrique s'éclairent et se complètent mutuellement. La contribution des mathématiques à l'éducation du citoyen y apparaît clairement. La partie statistique a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation, à la réalisation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques et d'en faire l'analyse critique. » *(Gestion de données & fonctions en 5^{e})*
>
> 2. « Les notions essentielles relatives à cette rubrique ont été introduites ou approfondies en 6^{e} et 5^{e}. […] Le lien avec les autres disciplines et avec l'éducation à la citoyenneté sera maintenu et renforcé. » *(Gestion de données & fonctions en 4^{e})*
>
> 3. « Le programme du cycle central du collège a pour objectif de permettre […] en “organisation et gestion de données” l'acquisition de quelques outils statistiques utiles dans d'autres disciplines et dans la vie de tout citoyen. » *(Accompagnement du programme de 5^{e} & 4^{e})*
>
> 4. « Par ailleurs, la place des statistiques dans la vie courante et leur utilisation dans de nombreuses disciplines demandent que la formation du futur citoyen se poursuive en ce domaine… » (*Accompagnement du programme de 3^{e}*)

2.6. L'articulation des mathématiques avec la vie des citoyens s'accomplit par la ***modélisation*** de ***situations*** du monde. Le ***matériau de base*** est ici constitué des ***grandeurs*** en lesquelles se déploie la diversité du monde. L'***outil fondamental***, à ce niveau des études mathématiques, est alors celui de la ***proportionnalité***, lié lui-même à la notion de ***pourcentage*** – ce qu'illustre le choix d'extraits ci-après.

> 1. « C'est dans des situations mettant en jeu des grandeurs que tous les élèves pourront réinvestir les connaissances acquises en mathématiques. Les mathématiques du citoyen sont celles qui interviennent comme outils pour les grandeurs, celles qui permettent de modéliser efficacement des situations faisant intervenir des grandeurs. »
>
> 2. « Les élèves ont eu l'occasion de prendre conscience petit à petit, au long du collège, de la nature de l'activité mathématique et des mathématiques, en particulier avec la construction de modèles de certaines situations, notamment celles de la proportionnalité. Ils acquièrent également des techniques élémentaires de traitement et de résolution, qui ont des utilisations très diverses au quotidien, dans les autres disciplines et dans la vie du citoyen. »
>
> 3. « La proportionnalité est un concept capital. Elle est indispensable pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs physiques ; sous l'aspect des pourcentages, elle joue un rôle essentiel dans la vie du citoyen. »
>
> 4. « La proportionnalité, rencontrée dès l'école, est, en particulier, un concept non seulement essentiel dans la vie du citoyen, mais encore fondamental pour l'étude et la compréhension des relations entre les grandeurs physiques. »

3. De l'instruction à l'éducation

3.1. Le citoyen se définit par son rapport à la Cité : il détient une part de la souveraineté politique et doit assumer cette part de pouvoir au sein de la *polis* pour s'assumer effectivement en tant que citoyen. Si l'instruction à laquelle il a droit – et qu'il est de son devoir d'acquérir – doit l'aider à déjouer les tyrannies que peuvent faire peser sur lui les savants et les puissants, cette entreprise est d'emblée collective, collégiale, bref, « citoyenne ». Car le citoyen est le contraire de l'***idiot*** : le mot *idiotès* désigne à l'origine, en grec, l'homme privé, qui se prive (ou se trouve privé) de tout ce qui n'est pas simple vie « privée », par opposition à l'homme public impliqué dans la vie de la Cité, qui est aussi l'homme « libre ». Le problème de l'instruction du citoyen se pose alors autrement qu'il ne se pose pour l'idiot de la Cité : constamment, il faut s'inquiéter de savoir si cette instruction lui permettra d'être à la hauteur des affaires de la Cité. Tel est exemplairement le souci de Condorcet face aux formidables défis que pose aux citoyens la Révolution française lorsque, en octobre 1793, alors qu'il doit se cacher (il a été décrété d'accusation le 3 octobre 1793), il rédige son *Esquisse d'un Tableau historique des progrès de l'esprit humain* (qui sera publiée en 1795, après sa mort) :

> Tout nous dit que nous touchons à l'époque d'une des grandes révolutions de l'espèce humaine. […] L'état actuel des lumières nous garantit qu'elle sera heureuse ; mais n'est-ce pas aussi à condition que nous saurons nous servir de toutes nos forces ? Et pour que le bonheur qu'elle promet soit moins chèrement acheté, pour qu'elle s'étende avec plus de rapidité dans un plus grand espace, pour qu'elle soit plus complète dans ses effets, n'avons-nous pas besoin d'étudier dans l'histoire de l'esprit humain quels obstacles nous restent à craindre, quels moyens nous avons de surmonter ces obstacles ?

3.2. D'une manière générale, l'instruction prodiguée doit répandre les lumières qui permettront de « perfectionner l'espèce humaine » : le programme d'études est immense, même quand on le recentre autour des besoins d'instruction « politique » ! Dans le troisième de ses *Mémoires sur l'instruction publique* (1791), Condorcet écrit ainsi :

> Il faut non seulement que chaque homme soit instruit des nouvelles lois qui s'exécutent ou se préparent dans les diverses branches de l'administration, qu'il soit toujours en quelque sorte au courant de la législation sous laquelle il doit vivre ; il faut de plus que si l'on agite de nouvelles questions politiques, si l'on cherche à fonder l'art social sur de nouveaux principes, il soit averti de l'existence de ces questions, des combats d'opinions qui s'élèvent sur ces principes. Comment, en effet, sans cette instruction pourrait-il connaître et les hommes par qui sa patrie est gouvernée et ce qu'elle en doit attendre, savoir quels biens ou quels maux on lui prépare à lui-même ? Comment sans cela une nation ne resterait-elle pas divisée en deux classes, dont l'une, servant à l'autre de guide, soit pour l'égarer, soit pour la conduire, en exigerait une obéissance vraiment passive, puisqu'elle serait aveugle ? Et que deviendrait alors le peuple sinon un amas d'instruments dociles que des mains adroites se disputeraient pour les rejeter, les briser, ou les employer à leur gré ?

Mais il ajoute aussitôt ceci [16] :

> Je n'ai point la prétention de vouloir changer en publicistes les vingt-quatre millions de citoyens actifs qui, réunis sous une loi commune, veulent être libres de la même liberté ; mais, dans cette science comme dans toute autre, quelques heures d'attention suffisent souvent pour comprendre ce qui a coûté au génie des années de méditation. D'ailleurs, on aurait soin, dans cette instruction, de rapporter aux droits de l'homme toutes les dispositions des lois, toutes les opérations administratives, tous les moyens comme tous les principes ; la déclaration des droits serait l'échelle commune à laquelle tout serait comparé, par laquelle tout serait mesuré. Dès lors, on n'aurait plus besoin de ces connaissances étendues, de ces réflexions profondes, souvent nécessaires pour reconnaître l'intérêt commun sous mille intérêts opposés qui le déguisent. Ainsi, en ne parlant aux hommes que de ces droits communs à tous, dans l'exercice desquels toute violation de l'égalité est un crime, on ne leur parlera de leurs intérêts qu'en leur montrant leurs devoirs et toute leçon de politique en sera une de justice.

3.3. Mais le citoyen n'a pas besoin seulement d'instruction « politique » au sens restreint du terme. Le troisième mémoire porte *Sur l'instruction commune pour les hommes*, dont Condorcet précise les grandes divisions en ces termes :

> Réglée comme toute autre sur les besoins les plus généraux, elle aura principalement pour objet : 1) les connaissances politiques ; 2) la morale ; 3) l'économie domestique et rurale ; 4) les parties des sciences et des arts qui peuvent être d'une utilité commune ; 5) enfin, l'éducation physique et morale.

Tant ce découpage que le contenu précis des champs de connaissance qu'il distingue mérite d'être indéfiniment repris, réexaminé, réévalué. Mais la problématique générale du choix des matières à étudier est, elle, sans ambiguïté : elle se fonde sur ce que Condorcet nomme l'***utilité*** des connaissances dont l'on doit s'instruire. L'abord préconisé est clairement ***fonctionnel*** : il n'y a pas ici de valorisation ***formelle*** de la connaissance, qui ne saurait être regardée comme un bien précieux indépendamment de ses usages. Cela ne signifie pas – au contraire ! – que la connaissance puisse se réduire à la mise en application d'un corps de doctrine indiscuté. À propos de l'« économie rurale », dans une section intitulée significativement « Utilité et difficulté de substituer dans l'économie rurale à une routine aveugle une pratique éclairée par l'observation », Condorcet observe ainsi :

> L'économie rurale n'est, en général, que l'application de ce que l'expérience a fait connaître de plus certain, de plus profitable […]. Cette expérience se réduit presque partout à d'anciens usages que l'on suit, non parce qu'ils sont les meilleurs, mais parce qu'ils conduisent d'une manière presque sûre à tirer de son exploitation le produit sur lequel on a fait ses arrangements antérieurs.

Or, le problème, souligne Condorcet, est complexe. L'inertie des pratiques et des pensées n'explique pas tout : pour innover, encore faut-il s'être assuré de l'utilité des innovations ! Et c'est en ce point que la question d'une diffusion idoine des lumières appropriées se pose avec acuité :

> Un homme peu éclairé, incapable de distinguer une vérité éprouvée par l'expérience, d'une rêverie annoncée avec une audacieuse importance, doit regarder toute innovation comme un véritable jeu de hasard, dans lequel il ne veut risquer ni sa subsistance ni même une partie de sa fortune. Cette prudence n'est donc point de la stupidité ; car la grande probabilité du succès peut seule justifier des tentatives […]. Le défaut d'instruction est donc la véritable cause du peu de progrès de l'agriculture, et on ne se plaindra plus de cette haine trop commune pour les nouveautés, lorsqu'on aura instruit les hommes à les apprécier ; mais ils aimeront à rester à leur place, tant qu'ils ne pourront marcher que dans les ténèbres.

On notera l'insistance mise à identifier comme un déficit d'instruction ce que d'aucuns pourraient regarder trop vite comme une « stupidité » intrinsèque et, quasiment, native ! Dans un texte plus ancien, la *Lettre d'un laboureur de Picardie à M. N.*** Auteur Prohibitif, à Paris* (1775), réponse à un ouvrage de Jacques Necker (1732-1804) publié la même année, *Sur la législation et le commerce des grains*, Condorcet faisait déjà dire sans détour au laboureur picard :

> Vous exagérez la stupidité du peuple : nous sommes ignorants parce qu'on n'a point daigné nous donner les moyens de nous instruire ; parce qu'il est tout simple qu'une jurisprudence, une législation des finances qu'aucun jurisconsulte, aucun financier ne peuvent se vanter d'avoir entendues en entier, n'offrent qu'un brouillard à des hommes qui n'ont ni le temps ni l'habitude de la réflexion : mais nous savons saisir les idées simples qu'on nous présente clairement, & raisonner avec justesse sur ces idées : nous savons souffrir avec

[16] Un publiciste est « celui qui écrit sur le droit public, qui est versé dans cette science » (Littré) ; et, plus largement, celui qui écrit sur les matières politiques. Le mot, sorti d'usage aujourd'hui, était entré dans le Dictionnaire de l'Académie en 1762.

> patience les outrages que nous ne pouvons repousser ; mais nous ne sommes pas abrutis au point de ne les plus sentir.

3.4. L'instruction voulue par Condorcet, l'instruction utile au citoyen, porte sur les principes – les « technologies » – autant que sur les connaissances particulières que ces principes permettent de produire. Dans son premier mémoire, intitulé *Nature et objet de l'instruction publique*, où il précise notamment que « la constitution de chaque nation ne doit faire partie de l'instruction que comme un fait », Condorcet écrit ainsi :

> Le but de l'instruction n'est pas de faire admirer aux hommes une législation toute faite, mais de les rendre capable de l'apprécier et de la corriger. Il ne s'agit pas de soumettre chaque génération aux opinions comme à la volonté de celle qui précède, mais de les éclairer de plus en plus, afin que chacune devienne de plus en plus digne de se gouverner par sa propre raison.

D'une manière plus générale, l'instruction citoyenne vise à permettre à chacun d'entretenir, à tout objet d'instruction, un rapport critique. « L'instruction politique, note ainsi Condorcet, ne doit pas se borner à la connaissance des lois faites, mais s'étendre à celles des principes et des motifs des lois proposées. »

3.5. Que sont les objets sur lesquels doit porter cette instruction publique ? Faut-il pousser jusqu'à ce qu'on regarde ordinairement comme de simples objets ***d'éducation*** ? Condorcet est, là-dessus, fort réservé. La question est délicate, et polémique. Dans un article du *Moniteur* du 15 août 1793, l'un de ses amis et collègues (il est aussi mathématicien), Gilbert Romme (1750-1795), membre comme lui du Comité d'Instruction publique, écrit [17] :

> On a raison de distinguer l'éducation de l'instruction. L'instruction développe les facultés intellectuelles, l'éducation développe le caractère et les facultés morales […]. L'éducation seule donnerait de bonnes mœurs avec des préjugés ; l'instruction seule favoriserait les talents, mais donnerait de la jactance. Réunissez-les, et vous donnerez aux hommes des mœurs pures et des lumières.

L'éducation porterait donc sur le rapport de l'élève à des objets (« discipline », « civilité », etc.) que l'instruction ignorerait de fait, tandis qu'elle-même serait indifférente à nombre d'objets relevant plus proprement de l'instruction (ceux, en gros, dont nous parlent les différentes disciplines de connaissance enseignées à l'École). De fait, le passage, en 1932, à l'initiative d'Édouard Herriot (1872-1957), alors Président du Conseil [18], de la dénomination de ministère « de l'Instruction publique » à celle de ministère « de l'Éducation nationale » marquera tout à la fois la reconnaissance de cet écart entre instruction et éducation et l'élargissement du domaine de « l'éducation scolaire », en écho notamment au développement des mouvements de jeunesse et des associations éducatives visant à promouvoir des aspects toujours plus nombreux – relevant du sport, des loisirs, de la culture populaire, etc. – de la formation.

3.6. La distinction qu'explicitait Romme et que le sens commun continue de valider en grande partie peut cependant être contestée. L'écart de fait renvoie-t-il vraiment à un écart intrinsèque, indépassable ? Répondre positivement reviendrait à confondre le fait et le droit. À contre-fil, on peut soutenir que tout objet d'éducation est, potentiellement, objet d'instruction, parce que tout objet est ou peut être l'objet de savoirs positifs, dont il conviendrait que nous nous instruisions pour former et réformer notre rapport à cet objet. L'éducation marquerait ainsi, en l'occupant parfois indûment, le territoire potentiel d'une instruction qui, dans tout un ensemble de cas, n'aurait pas ***encore*** su conquérir les moyens épistémologiques de sa mission. Allant plus loin, on pourrait dire que toute éducation occupe le lieu d'une instruction déterminée, et l'on pourrait se proposer alors de débusquer, derrière l'éducation prétendue, l'instruction explicite ou, plus souvent, « cachée », et quelquefois hautement critiquable, dont elle procèderait. ***En ce sens***, mais en ce sens seulement, il appartient à l'instruction de se substituer progressivement à l'éducation, sans pour cela entraver le libre choix qu'a chacun de ses façons d'être, de ses manières d'agir, de sa pensée même, selon le principe de la ***laïcité au sens fort*** [19].

---

[17] Cité *in* Charles Coutel, *Condorcet. Instituer le citoyen*, Michalon, 1999, p. 68.

[18] Ce qui équivaut au titre de Premier ministre aujourd'hui.

[19] Sur cette notion, voir la notice *Sur la laïcité*, que l'on trouvera sur le site Internet de l'IUFM d'Aix-Marseille, sous la rubrique *L'encyclopédie du professeur* / *Notices*.

3.7. Un autre usage peut être fait du couple instruction-éducation, dont on trouve un écho dans ce passage de la 24e leçon du *Cours de philosophie positive* d'Auguste Comte (1798-1857) [20] :

> Quoiqu'il soit, sans doute, infiniment plus aisé d'apprendre que d'inventer, il faut enfin que le public, pour n'être point livré aux sophistes et aux trafiquants de science, soit profondément convaincu que, comme le simple bon sens l'indique clairement, ce qui a été découvert par le long et pénible travail du génie, la raison commune ne saurait se l'approprier réellement que par une méditation persévérante, précédée d'études convenables. […] Car les hommes ont encore plus besoin de méthode que de doctrine, d'éducation que d'instruction.

« Les hommes ont encore plus besoin d'éducation que d'instruction » : ici, l'instruction tend à être regardée – négativement – comme n'apportant au citoyen qu'un stock de recettes, tours de main ne renvoyant qu'à eux-mêmes car non articulés en une organisation de savoir qui en vivifie et en contrôle le sens. Par contraste, l'éducation, refusant l'imposition de « doctrines » toutes faites et indiscutées, fournit des méthodes pour observer, analyser, évaluer. Nul doute que Condorcet ne s'opposerait pas à l'éducation en ce sens, même s'il reste vrai que les objets « d'éducation » (au sens usuel) qui peuvent être regardés, à un moment historique donné et à un niveau scolaire donné, comme des objets « d'instruction » (au même sens) dépendent tout à la fois et de l'état de développement de la société (qui désigne ce dont elle accepte que ses jeunes générations s'instruisent), et du développement des sciences susceptibles d'outiller cette instruction.

4. Des mathématiques pour le citoyen

4.1. L'attention à la formation du citoyen dans la classe de mathématiques suppose l'attention à trois niveaux de la vie de la classe : celui des ***contenus mathématiques*** étudiés, celui du ***rapport aux mathématiques*** étudiées et utilisées, celui du ***rapport à l'étude*** des mathématiques. La première exigence impose notamment d'être attentif, non pas seulement à « l'infrastructure » mathématique, mais aussi aux sujets d'étude « superstructurels », « de contact » avec le reste du monde qui figurent dans les programmes parce qu'ils sont presque indispensables pour que les mathématiques construites dans la classe donnent aux élèves une prise effective sur les situations du monde dans lesquelles ils seront amenés à intervenir comme citoyens.

4.2. On illustrera la notion de « sujets d'étude "de contact" » par un premier exemple, celui des notions solidaires de ***taux*** (de croissance), d'***indice***, de ***coefficient multiplicateur***, etc. Le programme de 3e comporte ainsi le passage suivant :

> La définition d'une fonction linéaire de coefficient a s'appuie sur l'étude de situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est « je multiplie par a ».
>
> Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, une mise en évidence similaire peut être faite ; par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95.

On voit ici exemplairement deux éléments juxtaposés qui ont, dans la culture mathématique actuelle du collège, deux statuts différents : le premier relève de l'infrastructure mathématique que tout professeur se regarde comme tenu de mettre en place ; le second apparaît aujourd'hui comme un élément un peu périphérique, d'interfaçage avec le reste du monde – en particulier avec les enseignements d'autres disciplines –, dont le sort dans le travail mathématique de la classe est en conséquence plus incertain.

4.3. On peut rapprocher ce qui précède d'une situation curriculaire qui se présente en 4e, classe où, dans le secteur d'études des *Fonctions numériques*, le programme comporte un thème d'études intitulé *Calculs faisant intervenir des pourcentages*. Ce thème fait l'objet du commentaire suivant :

> En liaison avec d'autres disciplines (géographie), la notion d'indice pourra être présentée comme un cas particulier du coefficient de proportionnalité, donnant lieu à illustrations et calculs mais en aucun cas à des développements théoriques.

S'agissant des compétences exigibles à propos du thème d'études examiné, le programme explicite ceci :

---

[20] Cité *in* Bernadette Bensaude-Vincent, *L'opinion publique et la science*, Sanofi-Synthélabo, 2000, pp. 115-116.

Mettre en œuvre la proportionnalité dans des situations simples utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs.

À ce propos, le commentaire suivant est apporté :

Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines demandent de mettre en œuvre à la fois un coefficient de proportionnalité, sous forme de pourcentage ou d'indice, et des quantités ou des effectifs.

La référence aux indices est donc insistante ! De quoi s'agit-il ? On en présente rapidement le principe.

1. Soit une quantité Q (un prix par exemple) supposée variable dans le temps : on note Q_0 sa valeur au temps t_0 et Q_1 sa valeur au temps t_1. Supposons que $Q_1 > Q_0$; de l'instant t_0 à l'instant t_1 la quantité Q subit une augmentation mesurée par le taux de croissance $\frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$. Si par exemple $Q_0 = 275$ et $Q_1 = 340$ (en « oubliant » les unités, le rapport à calculer étant sans dimension), on a $\frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = \frac{340 - 275}{275} = \frac{65}{275}$. L'usage social dominant consiste à écrire ce rapport avec un ***dénominateur égal à cent***, c'est-à-dire sous la forme d'un ***pourcentage*** (ce qui permet de comparer aisément deux taux quelconques) : $\frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = \frac{65}{275} = \frac{\frac{6500}{275}}{100} = \frac{6500}{275}$ % ≈ 23,6 %. (L'écriture x % désigne simplement la fraction $x/100 = \frac{x}{100}$.)

2. En multipliant les quantités considérées par le coefficient de proportionnalité $a = \frac{100}{275}$ on passe de $Q_0 = 275$ et $Q_1 = 340$ à $aQ_0 = \frac{100}{275} \times 275$ et $aQ_1 = \frac{100}{275} \times 340$, c'est-à-dire à $aQ_0 = 100$ et $aQ_1 = \frac{100}{275} \times (275 + 65) = 100 + \frac{6500}{275} = 123{,}6$. Le nombre aQ_1 est noté I_{t_1/t_0} et est appelé « indice de Q à la date t_1 sur la base 100 à la date t_0 ». On a d'une manière générale : $I_{t_1/t_0} = 100 \times \frac{Q_1}{Q_0}$. Si par exemple un objet vaut 120 € en décembre 2002 et voit son prix grimper à 150 € en décembre 2003, on a $I_{2003/2002} = 100 \times \frac{150}{120} = 125$. Le prix de l'objet a donc augmenté de 25 %. On dit que « l'indice du prix de l'objet, base 100 en décembre 2002, passe à 125 en décembre 2003 ».

3. Les indices possèdent des propriétés qui en font l'intérêt (mais dont, toutefois, l'étude est exclue en 4^{e}). Notons ainsi qu'on a $I_{t_0/t_1} = 100 \times \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{10\,000}{100 \times \frac{Q_1}{Q_0}} = \frac{10\,000}{I_{t_1/t_0}}$ et encore que $I_{t_2/t_0} = \frac{I_{t_2/t_1} \times I_{t_1/t_0}}{100}$. En dépit du facteur « correctif » (10 000 dans un cas, 1/100 dans l'autre), ces formules sont d'un usage aisé, puisque ce facteur peut être intégré au calcul ***après coup***, par un choix de la position de la virgule qui ramène le résultat brut du calcul à un ordre de grandeur idoine. Si par exemple $I_{t_1/t_0} = 127$ et $I_{t_2/t_1} = 109$, on calcule $127 \times 109 = 13843$ et il vient « donc » $I_{t_2/t_0} = 138{,}43$, en sorte que le taux de croissance de Q entre les dates t_0 et t_2 est de 38,43 %. Semblablement, si $I_{t_1/t_0} = 105$ et $I_{t_2/t_1} = 89$, on calcule $105 \times 89 = 9345$ et il vient donc $I_{t_2/t_0} = 93{,}45 = 100 - 6{,}55$, en sorte que, entre les dates t_0 et t_2, Q a diminué de 6,55 % ; etc.

4.4. La question de la variation et des taux de croissance n'est pas abandonnée à l'issue du collège. En 2de, ainsi, le document d'accompagnement du programme enjoint de manière un rien sibylline ceci :

On retrouvera le résultat relatif à la comparaison de a, a^2 et a^3 (a étant un réel positif) lors de travaux sur les pourcentages et les coefficients multiplicateurs.

Dans la perspective qui précède, on doit voir là un prolongement naturel d'une question étudiée en principe en 4^{e} et en 3^{e}.

Lorsque, au cours d'une période, une certaine quantité valant Q_0 en début de période augmente de 100 r %, par exemple de 20 % = 100 × 0,2 % (ici, $r = 0{,}2$), elle atteint en fin de période la valeur Q_1 donnée par $Q_1 = Q_0 + 100\,r\,\% \times Q_0 = Q_0 + 100\,r\,\% \times Q_0 = (1 + r)Q_0$. Le ***coefficient multiplicateur*** est ici $a = 1 + r > 1$: on a $Q_1 = (1 + r)Q_0 = aQ_0$. Si deux augmentations de 100 r % s'enchaînent au fil de deux périodes successives, la valeur de la variable considérée passe successivement de Q_0 à $Q_1 = (1 + r)Q_0$ puis à $Q_2 = (1 + r)Q_1 = aQ_1 = a(aQ_0) = a^2Q_0$. On « retrouve » ainsi, derrière le phénomène d'augmentation répétée, le fait mathématique que $a^2 > a$, etc. S'il s'était agi d'une ***diminution*** de 100 r %, on aurait eu : $Q_1 = Q_0 - 100\,r\,\% \times Q_0 = Q_0 -$

$100\ r\ \% \times Q_0 = (1 - r)Q_0$. Le coefficient multiplicateur est ici égal $a = 1 - r < 1$ (avec $r \leq 1$, et donc $a \geq 0$). Dans le cas où $0 < a < 1$, on retrouve, semblablement, que, dans ce cas, $a^2 < a$.

Il n'est pas équivalent, pour ce citoyen en devenir qu'est l'élève, de recevoir une formation mathématique scolaire où le thème d'études précédent aurait – en conformité avec les programmes – une présence effective tout au long des années d'étude et une formation d'où il resterait obstinément absent. Bien entendu, il s'agira pour le professeur de concevoir et de réaliser des ***travaux d'étude et de recherche*** – dans le cadre par exemple d'un ***parcours d'étude et de recherche*** [21] – qui fassent apparaître les notions indiquées comme autant d'***outils techniques et technologiques*** au service de la connaissance et de l'action en matière de changements quantifiables.

4.5. Au-delà de l'exemple précédent, on peut situer tout un ensemble de développements possibles qui relèvent de cette science aujourd'hui encore non enseignée comme telle au secondaire et que Condorcet nommait, avec ses prédécesseurs et ses contemporains, l'***arithmétique politique***. Dans son second mémoire, en une section intitulée *Nécessité d'insister sur l'étude de l'arithmétique politique*, Condorcet écrit d'abord :

> Je n'entrerai ici dans aucun détail sur l'enseignement des diverses sciences qui font partie de l'instruction […]. Je n'insisterai que sur une seule science, l'arithmétique politique, à laquelle il faudrait donner ici une grande étendue.

La raison de cette insistance est simple et claire :

> En effet, cette instruction, que nous appelons générale, est cependant aussi l'instruction particulière qui convient à ceux qui se destinent aux fonctions publiques : elle n'est vraiment l'instruction commune que parce que tous les citoyens doivent être appelés à ces fonctions, doivent être rendus capables de les remplir.

Si, dans l'instruction politique du citoyen, Condorcet désigne ainsi tout particulièrement la place qui devrait revenir à l'***arithmétique*** politique, ce n'est pas seulement à cause de son utilité, mais aussi parce qu'elle relève d'une configuration épistémologique rare :

> Ainsi tout le monde concevra aisément l'importance de l'enseignement des sciences politiques proprement dites ; mais on connaît moins l'utilité, j'ai presque dit la nécessité de celle-ci [l'arithmétique politique], parce qu'elle est encore trop peu répandue et qu'elle exige la combinaison de deux espèces de connaissances qui ont rarement été réunies.

De quoi est donc faite cette science à faire connaître aux citoyens par l'École ? Condorcet répond ainsi :

> La manière de réduire en tables les faits dont il est utile de connaître l'ensemble et la méthode d'en tirer des résultats, la science des combinaisons, les principes et les nombreuses applications du calcul des probabilités qui embrassent également et la partie morale et la partie économique de la politique ; enfin, la théorie de l'intérêt des capitaux, et toutes les questions où se mêle cet intérêt, forment les branches principales de cette science.

Sur « l'utilité » de ces savoirs, Condorcet est presque intarissable. Ainsi écrit-il sévèrement :

> … c'est l'ignorance trop générale de l'arithmétique politique qui fait du commerce, de la banque, des finances, du mouvement des effets publics, autant de sciences occultes, et pour les intrigants qui les pratiquent, autant de moyens d'acquérir une influence perfide sur les lois qu'ils corrompent, sur les finances où ils répandent l'obscurité et le désordre.

4.6. Dans la description de l'arithmétique politique, on aura reconnu des matières aujourd'hui partiellement enseignées – combinatoire, statistique, probabilités –, mais aussi ce que nous nommons « mathématiques financières », dont certains ingrédients clés (coefficient multiplicateur, etc.) ont été évoqués plus haut, bien que ces mathématiques ne figurent plus aujourd'hui dans le curriculum mathématique de l'enseignement ***général*** [22]. On ajoutera ici un thème, celui des ***systèmes de vote***, cher à Condorcet, qui a notamment publié en 1785 un célèbre *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* [23], où il aborde des problèmes qui ont depuis

---

[21] En l'espèce, ce PER pourrait s'intituler par exemple « Changements et variations : entre mesures et calculs ».

[22] Notons toutefois que les programmes de la série STG (« Sciences et technologies de la gestion », qui remplace la série STT à partir de la rentrée 2005) comportent une part non négligeable de mathématiques financières.

[23] L'expression « à la pluralité des voix » signifie « à la majorité des voix ».

lors fait couler beaucoup d'encre, et dont on se contentera, dans ce qui suit, de donner un exemple simple [24].

1. Considérons la situation suivante : lors d'un vote, 15 électeurs ont eu à classer sans ex æquo trois candidats A, B, C ; le tableau ci-après présente les résultats obtenus.

Bulletins	Effectif
(A, B, C)	1
(B, A, C)	6
(A, C, B)	3
(C, A, B)	5

Le classement ayant recueilli le plus de voix est (B, A, C), dans lequel B est préféré à A et A est préféré à C.

2. Combien d'électeurs ont préféré A à B ? Un petit travail sur le tableau précédent permet de répondre : ils ont été 9 (sur 15) à l'avoir fait.

Bulletins	$A \succ B$
(A, B, C)	1
~~(B, A, C)~~	~~6~~
(A, C, B)	3
(C, A, B)	5
Total	9

3. On montre semblablement que 8 électeurs ont préféré C à B (et 7 ont préféré B à C), tandis que seuls 6 électeurs ont préféré B à A. Si l'on pose que, dans le groupe Σ des 15 électeurs, on a la relation de préférence $X \succ_\Sigma Y$ si le nombre de voix en faveur de la relation $X \succ Y$ est strictement supérieur au nombre de voix en faveur de la relation $Y \succ X$, on voit que, dans le vote envisagé ci-dessus, on a : $A \succ_\Sigma C$; $C \succ_\Sigma B$; $A \succ_\Sigma B$. La relation de préférence est transitive.

4. Mais imaginons maintenant que, lors d'un autre vote, les résultats suivants aient été obtenus.

Bulletins	Effectif
(A, B, C)	4
(A, C, B)	3
(B, A, C)	1
(B, C, A)	6
(C, A, B)	5
(C, B, A)	2

Un travail analogue à celui déjà présenté conduit à des résultats que l'on peut disposer dans le tableau suivant :

	Pour	Contre
$A \succ B$	12	9
$B \succ C$	11	10
$A \succ C$	8	13

On a donc $A \succ_\Sigma B$, $B \succ_\Sigma C$, mais $C \succ_\Sigma A$. Le groupe Σ préfère A à B et B à C, tout en préférant C à A ! La relation $\succ_\Sigma$ n'est pas transitive : c'est là l'***effet Condorcet***, emblématique de tout un ensemble de « paradoxes », d'imperfections, des différents modes de scrutin.

[24] Le thème des systèmes de vote (ou ***modes de scrutin***) ferait avantageusement l'objet d'un PER (qui pourrait être impulsé par la question « Pourquoi existe-t-il différents modes de scrutin ? »). On pourra se référer à ce propos au chapitre 5 de l'ouvrage d'Élisabeth Busser et Gilles Cohen intitulé *Jeux d'esprit et énigmes mathématiques* (Odile Jacob, 1988) ; et aussi, plus développé, au livre de Jean-Louis Boursin, *Les paradoxes du vote* (Odile Jacob, 2004).

5. Un certain rapport aux mathématiques

5.1. En un sens de ces mots qui n'était pas le sien, on l'a dit, Condorcet demande pour le citoyen une véritable ***éducation*** mathématique, et non une simple « instruction ». Position qu'illustre la mise en garde qu'il formule à propos de l'instruction visée en matière d'arithmétique politique :

> Sans cesse, dans les discussions relatives à l'administration, et même à la législation, on en sent le besoin ; et ce qui est pis encore, on l'ignore lorsqu'il est le plus réel. Peut-être croirait-on qu'il est inutile à celui qui exerce une fonction publique d'avoir immédiatement ces connaissances ; que, conduit à ces questions, il peut en demander la solution à des hommes qui ont fait une étude particulière de la science du calcul. Mais on se tromperait : l'ignorance des principes de ces calculs et de la nature des résultats auxquels ils conduisent, empêcherait d'entendre la solution des questions auxquelles on les appliquerait, et d'en profiter.

5.2. Cette exigence définit un certain type de rapport aux mathématiques et à leurs emplois. Un premier aspect d'un rapport idoine est, bien évidemment, le fait d'avoir avec les objets et les organisations mathématiques un commerce ***fonctionnel***, motivé par des besoins épistémologiques que ces objets et organisations viennent, même incomplètement, même imparfaitement, satisfaire. On illustrera cette exigence à l'aide de l'exemple suivant.

1. Étant donné un entier e sans facteur carré parfait et une expression $\dfrac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$ où a, b, c, $d \in \mathbb{Q}$ (avec $d \neq 0$), pourquoi cherche-t-on à récrire cette expression sous la forme $r + s\sqrt{e}$ où r, $s \in \mathbb{Q}$? Et comment, alors, s'y prendre ?

2. Supposons qu'on veuille s'assurer si, dans un repère donné, les points A (4 ; 2), B ($3\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$), C ($1+2\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$) sont bien alignés, et que, pour cela, on décide de calculer les pentes $p_{(AB)}$ et $p_{(AC)}$ des droites (AB) et (AC) en vue d'examiner si l'on a ou non l'égalité $p_{(AB)} = p_{(AC)}$. Un calcul très simple conduit aux égalités $p_{(AB)} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}$ et $p_{(AC)} = \dfrac{1+\sqrt{2}-2}{1+2\sqrt{2}-4} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$. On se trouve ainsi conduit à déterminer si l'on a ou non l'égalité $\dfrac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$.

3. Si l'on ne doit rencontrer que ***ce*** spécimen du type de problèmes consistant à décider de l'égalité de deux expressions contenant un radical, on peut par exemple choisir de « remplacer les quotients par des produits » : $p_{(AB)} = p_{(AC)}$ équivaut à l'égalité des produits en croix $(\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}-3) = (3\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}-1)$. Ici, on a d'une part $(\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}-3) = 10 - 7\sqrt{2}$ et, d'autre part, $(3\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}-1) = 10 - 7\sqrt{2}$. On peut donc conclure à l'égalité des pentes et, par suite, à l'alignement des points A, B, C.

4. Il existe pourtant, en mathématiques, une ***solution générique*** au problème d'identification rencontré. Comment en effet reconnaître si ***deux objets*** mathématiques d'un certain type ***sont ou ne sont pas le même objet ?*** Par exemple comment savoir si l'on a ou non l'égalité $7 \times 5 - 8 = 3^3$? Ou si $\dfrac{60}{84} = \dfrac{380}{532}$? Ou, encore, si $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} = n^3$? La ***solution canonique*** consiste à créer un ***système d'écriture*** des objets du type considéré dans lequel chacun d'eux ait ***une écriture et une seule*** ; puis, cela fait, à « calculer » l'écriture canonique de chacun des objets à comparer ($7 \times 5 - 8 = 35 - 8 = 27$, $\dfrac{60}{84} = \dfrac{4\times 15}{4\times 21} = \dfrac{3\times 5}{3\times 7} = \dfrac{5}{7}$, etc.), en sorte qu'on puisse décider ***d'un simple coup d'œil*** sur leurs écritures canoniques si les deux objets sont identiques ou non (on a ici $7 \times 5 - 8 = 27$ et $3^3 = 27$, et donc $7 \times 5 - 8 = 3^3$, $\dfrac{60}{84} = \dfrac{5}{7}$ et $\dfrac{380}{532} = \dfrac{190}{266} = \dfrac{5\times 19}{19\times 7} = \dfrac{5}{7}$, et donc $\dfrac{60}{84} = \dfrac{380}{532}$, etc.). On notera en passant que, dans la technique « par les produits en croix », ***on n'échappe pas à l'exigence de se ramener à des écritures canoniques*** : c'est en effet exactement ce en quoi consiste le fait de « calculer » les expressions $(\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}-3)$ et $(3\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}-1)$.

5.3. L'exemple précédent est paradigmatique. Car la raison d'être de ***tous*** les « calculs » (sur les entiers, les fractions, les polynômes, les vecteurs, etc.) étudiés ***de l'école primaire à l'université*** est de permettre d'identifier un objet mathématique ***par simple examen formel*** de son écriture. Oublier cette raison d'être, c'est rater le sens d'une partie essentielle – tous les calculs ! – des mathématiques enseignées : c'est donc priver les élèves d'une clé essentielle ***pour comprendre « ce qu'on fait en maths »*** depuis l'école primaire. D'une manière plus générale, l'absence d'explicitation des ***raisons d'être*** des objets et des organisations mathématiques rencontrées dans les études scolaires est aujourd'hui ***l'un des déficits les plus graves que l'on doive constater dans l'optique d'une éducation citoyenne***.

5.4. Un second aspect de l'exigence d'***éducation*** mathématique regarde, non plus la ***motivation***, mais la ***justification*** des organisations mathématiques enseignées, c'est-à-dire le ***moment technologico-théorique*** de la construction de ces organisations. On s'arrêtera à nouveau, à cet égard, sur l'exemple déjà examiné, en supposant qu'a été élaborée la technique classique pour « chasser les radicaux du dénominateur ».

1. Cette création technique – à quoi on pourrait penser réduire l'***instruction*** mathématique – fait apparaître des ***besoins technologico-théoriques*** précis, et tout d'abord un besoin de ***nomination*** : comment désigner l'expression $c - d\sqrt{e}$ par laquelle on doit multiplier numérateur et dénominateur du quotient $\dfrac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$? La réponse est traditionnelle : il s'agit de l'expression ***conjuguée*** de l'expression $c - d\sqrt{e}$ qui figure au dénominateur. Notons qu'à ce stade ce terme reste ***opaque*** : pourquoi « conjuguée » ? De quelle « conjugaison » s'agit-il ? La question peut en ce point demeurer sans réponse, ce qui n'autorise pas à ne pas l'expliciter.

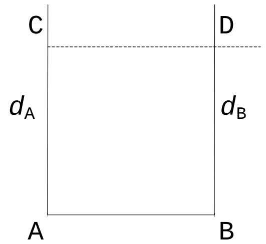
2. La question essentielle est toutefois la suivante : étant donné un quotient $\dfrac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$, arrivera-t-on toujours à la ***même*** expression $u + v\sqrt{e}$, quelle que soit la manière dont on s'y prend pour « travailler » l'expression donnée ? En d'autres termes, y a-t-il ***unicité*** de l'écriture canonique ? On est ainsi conduit à tenter de démontrer l'implication suivante : $u + v\sqrt{e} = u' + v'\sqrt{e} \Rightarrow u = u'$ et $v = v'$, où on suppose que $u, v, u', v' \in \mathbb{Q}$ (et où, en outre, $e \in \mathbb{N}^*$ n'est pas un carré parfait : si par exemple on avait $e = 9$ on aurait $7 - 2\sqrt{e} = -5 + 2\sqrt{e} = \ldots$). La démonstration demandée peut procéder ainsi : si $v = v'$ l'égalité $u + v\sqrt{e} = u' + v'\sqrt{e}$ entraîne que $u = u'$: la démonstration est terminée ; si $v \neq v'$ l'égalité $u + v\sqrt{e} = u' + v'\sqrt{e}$ entraîne que $\sqrt{e} = \dfrac{u' - u}{v - v'}$ et donc que $\sqrt{e} \in \mathbb{Q}$, ***en contradiction*** avec l'hypothèse que *e* ***n'est pas un carré parfait*** : la démonstration est complète.

3. La justification précédente suppose un résultat technologique à la frontière du « théorique » : si $e \in \mathbb{N}$ n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{e} \notin \mathbb{Q}$. La démonstration traditionnelle de ce fait a pu être vue en 3[e]. Mais elle gagne à être remplacée, ici, par la démonstration suivante, davantage en rapport avec ce qui précède. Par hypothèse, le nombre $\sqrt{e}$ n'est pas entier ; il existe donc un entier n tel que $n < \sqrt{e} < n+1$. Pour montrer que $\sqrt{e} \notin \mathbb{Q}$ il suffit de montrer que $\sqrt{e} - n \notin \mathbb{Q}$. Supposons alors que, au contraire, $r = \sqrt{e} - n$ soit rationnel. Comme en outre $\sqrt{e} - n < 1$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $0 < p < q$ et $\sqrt{e} - n = \dfrac{p}{q}$. Supposons de plus que le couple (p, q) a été choisi de manière que q soit ***le plus petit possible***. Montrons alors qu'on peut toujours trouver un autre couple (p', q') vérifiant les conditions précédentes, mais avec $q' < q$, en contradiction avec le choix de q, ce qui conduira ***à rejeter l'hypothèse*** que $r = \sqrt{e}-n \in \mathbb{Q}$. On a en effet : $\dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{e-n}} = \dfrac{\sqrt{e}+n}{e-n^2} = \dfrac{r+2n}{e-n^2}$. En résolvant l'équation $\dfrac{q}{p} = \dfrac{r+2n}{e-n^2}$ par rapport à r, il vient alors : $r = \dfrac{q(e-n^2)-2np}{p}$, avec $p < q$, comme attendu.

5.5. D'une manière générale, il convient de faire prévaloir un rapport éclairé et éclairant aux mathématiques, qui aille au-delà d'une instruction à valeur purement instrumentale en ce qu'elle fasse reconnaître, pour chaque réalité mathématique rencontrée, ***ce qui la motive et ce qui la garantit***. À titre de nouvelle illustration, on considère ici l'exemple du ***travail déductif en géométrie***.

1. Considérons l'un des plus humbles types de tâches demandés à de jeunes élèves : produire ou reproduire une figure « simple ». Ainsi en va-t-il dans le petit problème suivant proposé par un manuel de collège actuel : « construire un carré de 2,2 cm de côté. Quel est son périmètre ? Quelle est son aire ? ». Pour cela, on trace d'abord un segment [AB] de longueur 2,2 cm, puis on élève en A et B, à l'aide d'une équerre par exemple, deux demi-droites, d_A et d_B, perpendiculaires à (AB) et situées du même côté de cette droite. On

marque alors sur d_A le point C tel que AC = AB. Arrivé là, deux voies sont possibles : on peut tracer la perpendiculaire en C à (AC), qui coupe d_B au point D cherché ; ou on peut marquer sur d_B le point D tel que BD = AB, et tracer [CD].



2. Ce qui précède pose pourtant problème. Le carré demandé doit avoir ses quatre côtés de même longueur et ses quatre angles droits. Si l'on suit la première voie, on est sûr (par construction) que les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sont droits et que AC = AB ; affirmer que ABCD est un carré, c'est donc affirmer *ipso facto* que $\widehat{D} = 90^o$ et que CD = DB = AB ! Si l'on choisit la deuxième voie, affirmer que ABCD est un carré c'est affirmer que (CD) est perpendiculaire à (AC) et (BD) et que, de plus, CD = AB.

5.6. Passer sous silence les propriétés subrepticement mobilisées dans le travail précédent éloigne de l'idée d'une authentique ***éducation mathématique***. Par contraste, un premier « geste éducatif » consiste ici à expliciter, à inventorier, à classer dans un ***trésor*** qui s'augmentera peu à peu, les propriétés géométriques que l'on est amené à regarder comme autant de ***faits spatiaux avérés*** dès lors qu'elles auront été confirmées ***par une expérimentation graphique systématique***. Un second geste consistera alors à ***organiser déductivement*** le trésor des propriétés géométriques.

1. Après examen des propriétés utiles, la construction du carré vue ci-dessus conduira par exemple à ajouter au trésor des vérités géométriques – s'ils n'y sont pas déjà – les faits spatiaux suivants :

Ax$_{n-1}$. Si des droites d et d' sont perpendiculaires à une droite δ, alors elles sont parallèles l'une à l'autre.

Ax$_n$. Si une droite δ est perpendiculaire à une droite d, elle est perpendiculaire à toute droite d' parallèle à d.

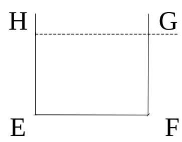
Ax$_{n+1}$. Si les droites d et d' sont parallèles, et si les droites δ, δ' sont perpendiculaires à d et d', alors d et d' découpent sur δ et δ' des segments de même longueur.

Ax$_{n+2}$. Les droites d, d' perpendiculaires à la droite δ coupant cette droite en A et A', si les points B $\in$ d et B' $\in$ d' situés d'un même côté de δ vérifient AB = A'B', alors la droite (BB') est parallèle à δ.

2. L'explicitation des propriétés précédentes conduit à autant d'***axiomes provisoires*** d'une théorie déductive ***en construction***, qui permettra d'effectuer de petits travaux déductifs, tel le suivant : d'après Ax$_{n-1}$, les droites (AC) et (BD), qui sont perpendiculaires à (AB), sont parallèles entre elles ; d'après Ax$_n$, la droite (CD), qui est perpendiculaire à (AC), est donc perpendiculaire à (BD), de sorte que $\widehat{D} = 90°$; etc.

3. Le trésor des propriétés géométriques sera progressivement à la fois ***augmenté*** et ***réorganisé***. C'est ainsi que, plus tard (et en tout cas en 5[e]), l'énoncé Ax$_{n+1}$ apparaîtra comme un simple cas particulier de l'énoncé suivant : si d // d' et δ // δ', et si d et δ sont sécantes, alors d et d' découpent sur δ et δ' des segments de même longueur.

5.7. Il est instructif – c'est-à-dire éducatif… – de s'arrêter sur une variante de l'exemple précédent : supposons qu'on veuille ***reproduire*** un certain ***rectangle*** ABCD (non nécessairement carré). Pour cela, on marque des points E et F tels que EF = AB ; puis on construit des points G et H d'un même côté de (EF) tels que (EH) et (FG) sont perpendiculaires à (EF) et que EH = FG = AD = BC. Cela fait, la figure cherchée est ***complètement déterminée***. Par suite, deux cas se présentent : soit EFGH est le rectangle demandé, « copie » du rectangle ABCD donné ; soit il n'en est rien ! Si l'on admet le ***principe*** préalable à toute activité « géométrique » selon lequel ***toute figure du plan peut être reproduite en n'importe quel endroit du plan***, les points G et H tels que EFGH soit une réplique du rectangle ABCD donné étant déterminés uniquement par la construction indiquée, on peut inférer de ce principe que l'on a tout à la fois et nécessairement $\widehat{H} = \widehat{G} = 90^o$ et HG = EF = AB. On dispose ainsi d'un principe ***de création d'énoncés vrais*** dans l'espace – à moins que l'espace ne possède pas la propriété d'uniformité que nous lui prêtons !



1. Considérons, à titre d'illustration, un triangle ABC, qu'il s'agit de reproduire. Plusieurs voies s'offrent.

2. On peut d'abord marquer des points D et E tels que DE = AB ; puis, du même côté de (DE), on trace une demi-droite [Dx) telle que $\widehat{EDx} = \widehat{BAC}$, et une demi-droite [E$y$) telle que $\widehat{DEy} = \widehat{ABC}$. Ces droites se coupent en un point F, sinon le triangle ABC ne pourrait pas être reproduit ; pour la même raison on a alors $\widehat{F} = \widehat{C}$, DF = AC et EF = BC. En d'autres termes, le principe de reproductibilité engendre (et implique) le ***premier cas d'isométrie*** des triangles.

> 3. Procédons maintenant ainsi : ayant marqué les points D et E et tracé la demi-droite [D*x*) ainsi qu'on vient de le faire, on marque sur [D*x*) le point F tel que DF = AC. Le même raisonnement que précédemment montre alors que EF = BC et que $\widehat{E} = \widehat{B}$ et $\widehat{F} = \widehat{C}$: on obtient ainsi le ***deuxième cas d'isométrie*** des triangles.
>
> 4. On peut enfin procéder de la manière suivante : ayant marqué les points D et E, on trace les cercles de centre D et de rayon AC et de centre E et de rayon BC. Ici, le raisonnement indiqué bute sur une difficulté spécifique : puisque le triangle ABC peut être reproduit, les cercles doivent se couper en un point au moins de chaque côté de (DE) ; il faut alors admettre qu'ils se coupent en un point au ***plus***. Cela fait, le raisonnement s'achève comme on a vu, et on obtient le ***troisième cas d'isométrie*** des triangles.

Dans la construction de la géométrie du plan, on optera pour une meilleure épistémologie ***et*** une meilleure éducation mathématiques en explicitant le « principe de reproductibilité en tout lieu », pour conclure de là à la ***vérité*** des cas d'isométrie. On voit ainsi que les cas d'isométrie enseignés aujourd'hui en classe de 2de constituent en fait une explicitation mathématique ***tardive***, sous forme de ***théorèmes***, de ***propriétés*** fondamentales manipulées « intuitivement ».

5.8. Une véritable éducation mathématique devra mettre en avant le fait que, ***du point de vue expérimental***, toutes les propositions de la géométrie sont ***contemporaines***, et qu'il n'y a donc pas d'ordre naturel entre elles : vouloir démontrer telle proposition – et, à plus forte raison, parler de ***la*** démonstration de cette proposition – n'a pas de sens tant qu'on ne peut préciser ***de quelles autres propositions*** il s'agirait de la déduire, c'est-à-dire tant qu'on ne la situe pas à l'intérieur d'un ***système hypothético-déductif*** déterminé, selon l'expression due au géomètre italien Mario Pieri (1899). Plus généralement, la construction d'une science géométrique sur une base ***à la fois*** expérimentale et hypothético-déductive constitue la condition *sine qua non* d'une éducation mathématique qui n'usurpe pas son nom. Par contraste, l'oubli de l'***objet*** de la géométrie euclidienne – l'étude de l'espace sensible où nous évoluons – au profit de la seule ***structure déductive*** des connaissances géométriques conduit en bien des cas, paradoxalement, à des formes insidieuses de ***démathématisation*** du savoir géométrique, dont les analyses précédentes ont donné un exemple typique. En sens inverse, le risque existe que la pertinence et la fécondité du ***travail déductif*** en géométrie ***et ailleurs*** (notamment dans les disciplines dites expérimentales) soient masqués par le primat donné à l'invocation de l'origine prétendument « expérimentale », « empirique », « pragmatique » des propriétés manipulées. Dans la perspective d'une éducation à la lucidité épistémologique, sans laquelle il n'est pas d'éducation à la citoyenneté, la dialectique de l'expérimental et du déductif doit être placée au cœur de toute formation scolaire.

6. Un certain rapport à l'étude des mathématiques

6.1. Dans son second *Mémoire sur l'instruction publique*, dans une section intitulée *Principes sur le choix des théories qui doivent être enseignées*, Condorcet écrit :

> Il est une partie de la mécanique qu'il serait nécessaire de joindre à cette instruction ; c'est celle qui apprendrait à résoudre ce problème : *l'effet que l'on veut obtenir étant donné, trouver une machine qui le produise*.

La formule peut être généralisée :

> On pourrait aller même jusqu'à étendre cette méthode à des métiers très simples ; par exemple, après avoir fait observer en quoi consiste une toile, on chercherait la machine avec laquelle on peut la produire. Cette manière analytique de considérer les machines en rendrait l'étude plus piquante et surtout plus utile. On connaîtrait les motifs de la construction de celles qu'on emploie journellement ; on apprendrait à trouver les moyens ou de les corriger ou d'en varier l'usage…

La portée du précepte que propose Condorcet est plus grande encore : légèrement modifié, le schéma évoqué – *l'effet que l'on veut obtenir étant donné, trouver comment le produire* – n'est qu'une autre manière d'énoncer la « tâche des tâches » : étant donné un ***type de tâches***, trouver une ***technique*** qui permette d'accomplir les tâches de ce type. La dynamique de l'instruction éducatrice est ici pilotée par la question du ***Comment ?*** (comment faire ceci, comment a-t-on pu faire cela, etc.). Bien entendu, la technique cherchée ne va pas sans sa ***technologie***, qui en concentre et en exprime les principes. Ou, pour le dire autrement, la question du *Comment ?* ne va pas sans la question du ***Pourquoi ?*** (pourquoi cela marche-t-il, pourquoi fait-on ainsi, etc.), qui tout à la fois s'y articule et la domine [25].

6.2. La dialectique de la technique et de la technologie appelle un réglage adéquat, qui requiert la recherche d'un optimum : mieux vaut par exemple une technique moins « commode », plus éloignée de la technique routinière des « spécialistes », mais plus intelligible (et donc de remémoration plus aisée) pour ceux entre les mains desquels elle est appelée à fonctionner. C'est ce que Condorcet, encore, souligne – à propos de l'art de l'arpenteur – dans ce passage du second *Mémoire* :

> Des notions de géométrie, on s'élèvera aux éléments de l'arpentage, qu'on développera suffisamment pour mettre en état d'arpenter un terrain, non par la méthode la plus commode, mais par une méthode générale dont on puisse difficilement oublier les principes ; en sorte que le défaut d'usage n'empêche pas de pouvoir l'employer lorsqu'on en aura besoin.

On retrouve ici, en passant, le souci d'un « équipement » mathématique du citoyen qui permette à celui-ci de se mesurer avec succès aux tâches que chacun peut être conduit à accomplir [26]. Ce principe, augmenté des deux préceptes rappelés plus haut – la formation scolaire se nourrit des questions les plus vives en forme de *Comment ?* et de *Pourquoi ?* et tente d'y répondre de manière appropriée, optimale (et, pour cela, provisoire souvent) –, dessine une problématique du rapport à l'étude scolaire des mathématiques qui est au cœur de l'éducation du citoyen.

6.3. On illustrera ce rapport à l'étude par un exemple déjà exploité : comment faire disparaître le radical figurant au dénominateur d'une expression du type $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, avec $d \neq 0$?

1. Une question ***cruciale*** est ici : comment fabriquer un rapport égal à un rapport donné ? Une réponse qui fut classique au collège autrefois repose sur le résultat technologique suivant : ***si*** $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ ***alors*** $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}}$ ***et, plus généralement,*** $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a+\mu c}{\lambda b+\mu d}}$ (sous réserve que tous ces quotients soient définis). On a par exemple : $\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}+3}{1} = \frac{3+(3\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}-1)+1} = \frac{3\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}}$.

2. La réponse apportée fait surgir une seconde question cruciale : pour utiliser la technologie indiquée, il faut disposer d'une seconde fraction égale à la première. Comment l'obtenir ? La réponse est ici facile : il suffit de ***multiplier haut et bas par le radical***, comme dans l'exemple suivant : $\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. La chose faite, on met en œuvre la technique prévue. On a ainsi : $\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{3+3\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)+(2-\sqrt{2})} = \frac{3+3\sqrt{2}}{1} = 3+3\sqrt{2}$.

3. Il reste bien entendu à s'assurer que la mise en œuvre de cette technique ne rencontrera pas d'obstacle. Si le dénominateur $c + d\sqrt{e}$ est multiplié par $\sqrt{e}$, le nouveau numérateur est $de + c\sqrt{e}$; on a alors : $c(c + d\sqrt{e}) - d(de + c\sqrt{e}) = c^2 - d^2e$. On obtient ainsi un rationnel, non nul parce que $\sqrt{e}$ est irrationnel : la technique peut fonctionner.

4. La technique ainsi assurée pourra ensuite ***évoluer***, devenir peut-être moins « naturelle », plus proche de la technique des spécialistes. Ramassée en quelques égalités successives, cette technique première livre en effet le mécanisme sur lequel elle repose :

$$\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}(a+b\sqrt{e})}{\sqrt{e}(c+d\sqrt{e})} = \frac{c(a+b\sqrt{e}) - d\sqrt{e}(a+b\sqrt{e})}{c(c+d\sqrt{e}) - d\sqrt{e}(c+d\sqrt{e})} = \frac{(c-d\sqrt{e})(a+b\sqrt{e})}{(c-d\sqrt{e})(c+d\sqrt{e})} = \frac{(ac-bde)+(bc-ad)\sqrt{e}}{c^2-d^2e} = \ldots$$

On voit ainsi émerger une seconde technique qu'il n'aurait guère été éducatif d'imposer *ex abrupto* : au lieu de commencer par multiplier haut et bas par $\sqrt{2}$, on peut multiplier ***directement*** par l'expression $c - d\sqrt{e}$.

[25] Le créateur du mot *technologie* (en allemand), Johann Beckmann (1739-1811), écrivait en 1777 : « On peut appeler histoire des arts les récits des inventions, de leurs progrès et de la fortune d'un art ou d'un métier, mais la technologie qui explique complètement, méthodiquement et distinctement tous les travaux, leurs conséquences et leurs raisons est bien davantage. »

[26] On notera la manière dont Condorcet situe les « éléments d'arpentage » : pour y arriver en partant de la géométrie, on ***s'élève***, on ne (con)descend pas.

6.4. L'éducation scolaire des futurs citoyens doit promouvoir un rapport à l'étude qui leur permette de parvenir, au sein de collectifs appropriés, à identifier les ***questions*** qui se posent à eux et à œuvrer pour leur apporter réponse en mobilisant – voire en contribuant, directement ou indirectement, à créer – les connaissances et savoirs pertinents. Cette activité fabricatrice de réponses engendre des ***chaînes de questions*** qui, en nombre de cas, étendent ouvertement ou subrepticement certaines de leurs ramifications jusque dans l'univers mathématique, ainsi bien sûr que dans les autres champs de connaissance.

6.5. À tout instant dans ce processus, quelle que soit la question en cours d'étude, on est conduit à interroger le monde autour de soi en le saisissant principalement (mais non bien sûr exclusivement) à travers certains des ***« médias »*** qui le font connaître [27]. Une telle interpellation de la culture soulève en permanence un double défi : celui de l'observation, de l'analyse, de l'évaluation, de l'exploitation des éléments de réponse recherchés, mais aussi des éléments ***non sollicités*** que les médias interrogés leur associent de façon plus ou moins contingente. Une éducation citoyenne doit alors permettre ***l'abord critique*** tant des éléments recherchés que des éléments qui leur sont associés en mettant en avant l'exigence d'une lecture ***« excriptrice »*** des médias, c'est-à-dire d'une lecture qui tente d'extraire les éléments ***inscrits*** dans le discours par lequel le média interrogé – du magazine grand public au manuel scolaire, du documentaire haut de gamme à l'émission de divertissement populaire, par exemple – répond en quelque sorte par avance à nos questions. Cette exigence appelle une ***dialectique des médias et des milieux*** [28], qui est au cœur de toute formation citoyenne.

6.6. On donne ici une illustration très partielle de cette dialectique en ébauchant l'analyse ***mathématique*** d'un fragment de texte de haute vulgarisation. Dans un ouvrage intitulé *Sommes-nous seuls dans l'univers ?* (Fayard, 2000), on trouve l'échange suivant entre un astronome, désigné ci-après par les initiales AVM, et un interlocuteur qui l'interroge (*op. cit.*, pp. 109-110) :

> AVM. – … les spéculations ne manquent pas sur ce que pourrait être une forme de vie à l'échelle atomique. En voici un exemple. Cette idée peut sembler délirante, mais rien n'interdit de s'amuser. Nous savons que le noyau d'un atome est un assemblage de neutrons et de protons soudés par la force nucléaire. Or ces noyaux peuvent grossir jusqu'à un certain point, mais, au-delà, ils deviennent instables et s'autodétruisent presque instantanément. C'est le trop célèbre phénomène de fission nucléaire. La conclusion s'impose d'elle-même : en un temps si court, jamais une structure assez complexe pour devenir vivante ne pourra se former. Mais voilà où le bât blesse : cette instabilité est toute relative. Le noyau n'est, en effet, instable que par rapport à notre échelle de temps. Mais le temps, vous le savez, est une chose magique. Pour faire un geste, il nous faut environ une seconde ; c'est pourquoi la seconde est une échelle de temps humaine. Mais, si nous avions la taille des noyaux atomiques, l'équivalent d'une seconde serait de l'ordre de 10^{-21} seconde (un dixième de dix milliardièmes de dix milliardièmes de seconde), ce qui est pour nous une durée infinitésimale, difficile même à concevoir.
>
> *– Donc, une seconde, pour un noyau atomique, c'est une éternité !*
>
> AVM – Absolument. Si j'avais la taille d'un noyau atomique, des durées de l'ordre de 10^{-15} seconde (un dixième de dix millionièmes de dix millionièmes de seconde) fonderaient la stabilité de mon univers et laisseraient peut-être le « temps » à des échafaudages nucléaires très complexes de se manifester. Pourquoi des formes de vie n'apparaîtraient-elles pas à cette échelle de grandeur, mais aussi à cette échelle de temps ?
>
> *– Cela fouette la pensée !*
>
> AVM – Vous voyez ? C'est passionnant, ce genre de spéculation, cela oblige à s'ouvrir l'esprit, à penser autrement. On a donc essayé d'imaginer une éclosion éphémère de la vie à l'échelle nucléaire. Après tout, à notre échelle, la vie est apparue sur Terre il y a quatre milliards d'années, et elle a pris tout ce temps pour

---

[27] On entend ici par ***média*** tout système de mise en représentation du monde à l'adresse d'un certain public. Le cours du professeur de mathématiques, le prêche d'un clerc, le journal d'un présentateur de télévision relèvent en ce sens du système des médias au sens large.

[28] Un ***milieu*** est un système qu'on peut regarder comme dénué d'intention « didactique » dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite (il faut alors interpréter son comportement de « réponse »), à telle question déterminée : il se comporte *à cet égard* comme un fragment de « nature ». Par contraste, pour nombre de questions que l'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une intention (par exemple « d'informer ») à l'endroit du questionneur. Bien entendu, un média peut fort bien, à propos de telle question, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel.

> évoluer jusqu'à notre civilisation élaborée. À l'échelle de temps de 10^{-21} seconde, combien de temps faudrait-il pour qu'une civilisation passe de l'état embryonnaire de la vie microbienne jusqu'à une civilisation élaborée ? Quatre milliards d'années, à cette échelle, cela fait moins d'un millième de seconde ! Imaginez les espèces qui apparaissent et disparaissent en une fraction de seconde, des dynasties qui se succèdent en un clin d'œil…

Plusieurs assertions à contenu mathématique (au moins en partie) doivent être interrogées. Ainsi de celle selon laquelle « 10^{-21} seconde, c'est un dixième de dix milliardièmes de dix milliardièmes de seconde ». Un dixième de dix milliardièmes de dix milliardièmes, cela s'écrit en effet $\frac{1}{10}\frac{1}{10\times 10^9}\frac{1}{10\times 10^9}$, soit encore $\frac{1}{10}\frac{1}{10^{10}}\frac{1}{10^{10}}$, ou $\frac{1}{10^{21}}$, et donc 10^{-21} : l'assertion est vérifiée. De même vérifie-t-on que « 10^{-15} seconde, c'est un dixième de dix millionièmes de dix millionièmes de seconde » : ce dernier nombre s'écrit $\frac{1}{10}\frac{1}{10\times 10^6}\frac{1}{10\times 10^6}$ et cette expression se ramène à $\frac{1}{10}\frac{1}{10^7}\frac{1}{10^7} = \frac{1}{10^{15}} = 10^{-15}$. D'une autre structure est l'affirmation selon laquelle « à l'échelle de temps de 10^{-21} seconde, quatre milliards d'années, cela fait moins d'un millième de seconde ». On a ici :

$$\text{quatre milliards d'années} \times 10^{-21} = 4 \times 10^9 \times (365 \times 24 \times 3600 \text{ s}) \times 10^{-21}$$
$$= 4 \times 10^9 \times (365 \times 86400) \times 10^{-21} \text{ s} = 4 \times 10^9 \times 31536000 \times 10^{-21} \text{ s} = 4 \times 10^{12} \times 31536 \times 10^{-21} \text{ s}$$
$$= 126144 \times 10^{12} \times 10^{-21} \text{ s} = 0{,}126144 \times 10^{18} \times 10^{-21} \text{ s} = 0{,}126144 \times 10^{-3} \text{ s} < 0{,}13 \text{ ms.}$$

On notera en passant la stylisation numérique du résultat, typique des médias de « vulgarisation » : quatre milliards d'années, cela correspond à une durée presque 8 fois inférieure à un millième de seconde (un huitième d'un millième de seconde, c'est exactement 0,125 ms). Sans doute aurait-il été plus juste de parler d'une durée de « moins de deux dix millièmes de seconde » (puisque 0,13 ms < 0,2 ms = 2×10^{-4} s) ; mais cela aurait compliqué un peu plus la description d'un phénomène que, en fin de compte, de telles approximations numériques ne dénaturent nullement.

6.7. Bien entendu, une lecture excriptrice du texte proposé poserait bien d'autres questions, dont seule l'étude effective révèlerait quelles connaissances, mathématiques ***et autres***, leur explicitation peut requérir. Ainsi en va-t-il de l'assertion selon laquelle « si nous avions la taille des noyaux atomiques, l'équivalent d'une seconde serait de l'ordre de 10^{-21} seconde », ou de l'affirmation que, « pour faire un geste, il nous faut environ une seconde » ; ou du fait que des noyaux atomiques « peuvent grossir jusqu'à un certain point », mais que, « au-delà, ils deviennent instables et s'autodétruisent presque instantanément » ; etc. On voit ici plus clairement ce que le recours au calcul dans la mise à l'épreuve des assertions « purement numériques » du paragraphe précédent illustrait tout en le masquant : alors que le calcul sur les décimaux et les puissances de dix constituait en ce cas le milieu approprié a mobiliser, des milieux pertinents restent à identifier et à « arraisonner » dans le cas des assertions mentionnées ici. La capacité de mobilisation voire de création de milieux appropriés – la capacité de ***mésogenèse*** – est ainsi au cœur de toute émancipation intellectuelle.

7. Élémenter les savoirs

7.1. La question des contenus de l'instruction scolaire est un problème essentiel. Quelle éducation mathématique, quelle éducation informatique, quelle éducation historique, quelle éducation philosophique, etc., procurer au citoyen ? Ce problème a été pensé depuis l'antiquité au moyen de la notion d'***éléments*** d'une science, problématique qui s'appuie sur le postulat selon lequel un savoir complexe (ou un complexe de savoirs) peut se réduire sans perte essentielle à une organisation de savoir plus simple, « élémentaire », capable d'***engendrer*** d'une certaine manière le complexe de savoir tout entier. Dans sa *Métaphysique*, Aristote (384-322 av. J.-C.) énonce ainsi le principe même des éléments de géométrie : « Nous appelons "éléments" ces propositions géométriques dont la démonstration est impliquée dans la démonstration des autres propositions, soit de toutes, soit de la plupart. » Quelque vingt siècles plus tard, dans l'article ÉLEMENTS DES SCIENCES de l'*Encyclopédie*, d'Alembert notera de même : « ...les *éléments* d'une science doivent contenir au moins le germe de toutes les vérités qui font l'objet de cette science. »

7.2. Le premier ouvrage d'éléments des mathématiques (en ce sens) est dû à Hippocrate de Chio (vers 435 av. J.-C.) ; il est aujourd'hui perdu. En revanche, les *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J.-C.) sont demeurés au long des siècles la référence constante de l'enseignement de la géométrie, même si le projet euclidien d'***élémenter*** les mathématiques connues à son époque n'a pas toujours été compris.

7.3. Le principe qui définit les éléments d'une science explique en particulier que certaines propositions « élémentaires » au sens courant du terme ne soient pas incluses dans un ouvrage d'éléments : ainsi en va-t-il par exemple de la proposition énonçant le concours des hauteurs d'un triangle, qui ne figure pas dans les *Éléments* d'Euclide, alors même que, bien entendu, ceux-ci fournissent les moyens de la démontrer !

7.4. Dans son célèbre commentaire du Livre I des *Éléments*, Proclus (411-485) précise les qualités que se doit de posséder un ouvrage d'éléments. L'historien Maurice Caveing les énumère ainsi : l'ouvrage doit « être débarrassé du superflu, s'en tenir aux points principaux qui font le tour du sujet et condensent ce qui est bien établi, être clair et concis, viser à saisir les théorèmes dans leur extrême degré de généralité [29] ». Un ouvrage d'éléments – tels, au XX^e^ siècle, les *Éléments de mathématique*, doublés des *Éléments d'histoire des mathématiques*, du mathématicien collectif Nicolas Bourbaki – consigne ainsi, en pratique, une organisation « élémentaire » globale qui, en nombre de ses usages, appelle divers additifs – généralisations, cas particuliers, etc. Dans cette perspective, on notera qu'Euclide est l'auteur de plusieurs autres ouvrages de mathématiques (pures ou « mixtes ») dont le contenu, « élémentaire » ou non, n'entrait pas, selon le « choix euclidien », dans la catégorie des ***éléments*** des mathématiques.

7.5. L'entreprise consistant à élémenter un complexe de savoirs, c'est-à-dire à en construire un système d'éléments, oblige à des choix dont le critère essentiel est, comme on l'a vu, la ***générativité*** de l'organisation élémentaire globale à laquelle on aboutit. Cette générativité se mesure à la capacité de l'organisation obtenue de permettre de créer, moyennant un travail d'ampleur ***limité***, des techniques et des technologies adéquates à des types de tâches inédits. On peut ainsi, pour chaque organisation mathématique déterminée, considérer les organisations ponctuelles (relatives à un type de tâches particulier) qu'il est possible d'en faire découler de manière relativement immédiate. Si l'on nomme ***zone d'étude normale*** (ZEN) l'ensemble des types de problèmes constitutifs de l'organisation mathématique élémentaire considérée, on peut, par contraste, désigner l'ensemble (flou) des types de problèmes que ce savoir élémentaire permet d'étudier de manière significative comme constituant la ***zone d'étude proche*** (ZEP) de l'organisation considérée.

7.5.1. Ainsi que l'indique la référence à un travail « d'ampleur limité », l'extension de la ZEP d'une organisation ou d'un complexe d'organisations de savoir dépend évidemment de qui mobilisent ces savoirs : ce qui est proche pour telle catégorie d'***usagers*** peut se révéler hors de portée pour telle autre catégorie.

7.5.2. On notera que, traditionnellement, les « problèmes » de mathématiques des concours d'entrée dans les grandes écoles scientifiques et des concours de recrutement de l'Éducation nationale (CAPES, etc.) se situent dans la ZEP du programme du concours plutôt que dans le cadre strict de ce programme. De là, fréquemment, l'apparente sous-utilisation des mathématiques figurant au programme, ce qui suscite la réprobation de certains candidats estimant alors – à tort – « avoir travaillé pour rien ».

7.5.3. Classiquement, en France, par ses questions et sous-questions, l'énoncé d'un tel problème apporte au candidat une aide appréciable : il s'agit en vérité du texte d'une étude mathématique développée mais ***lacunaire***, et dont le candidat est invité à ***combler les lacunes***. Il est possible, par cet artifice, de s'aventurer assez loin de la ZEN du programme du concours, créant ainsi une image hyperboliquement flatteuse de ce qui est exigé des candidats. Traditionnelle, cette pratique n'a pas que des avantages : les candidats sont parfois les premières victimes d'un miroir aux alouettes qui les détourne de l'humble travail de préparation accompli jour après jour, au profit de morceaux de bravoure mathématiques peu ou prou illusoires dans la mesure où, paradoxalement, ils n'aident pas à acquérir la capacité – si précieuse dans l'ordinaire de la vie – de travailler de manière productive dans la ZEP de savoirs fondamentaux, et non plus seulement dans leur zone d'application immédiate.

[29] Introduction générale, *in* Euclide, *Les Éléments*, vol. 1, PUF, Paris, 1990, p. 86.

7.6. L'élémentation des savoirs est à reprendre régulièrement, soit parce que les savoirs à élémenter ont changé, soit parce que leur élémentation vise à satisfaire de nouveaux besoins de publics eux-mêmes renouvelés. Dans tous les cas, une telle entreprise repose presque nécessairement sur le principe de collégialité : elle suppose un « collège » réunissant « savants » et « usagers » au service d'une création qui excède généralement les forces d'un seul individu, même si chacun peut apporter sa contribution à l'entreprise [30].

7.7. La réalisation d'un tel projet suppose d'abord que l'on décide des matières à élémenter. De même qu'il y eut autrefois un choix euclidien et, plus récemment, un choix « bourbachique [31] », d'autres choix peuvent aujourd'hui être nécessaires. C'est ainsi que, s'agissant d'élémenter la géométrie (ou plutôt les géométries) à l'intention des futurs professeurs de mathématiques, un mathématicien américain, George A. Jennings, a proposé [32] un choix qui ne se superpose guère au choix qu'exprime l'actuel programme du CAPES, puisqu'il place, à côté de la géométrie euclidienne et des coniques, la géométrie sphérique, la géométrie projective ou la géométrie de la relativité restreinte – en incluant donc des mathématiques éminemment « mixtes ». Cet exemple devrait rappeler en passant que le travail d'élémentation ne saurait se limiter aux mathématiques pures : Condorcet ne parlait-il pas, dans un extrait de ses *Mémoires* cité plus haut, de l'utilité d'enseigner les « éléments de l'arpentage » ? L'oubli, dans l'éducation scolaire des futurs citoyens, des éléments des savoirs « mélangés » les plus utiles conduit au mieux à une émancipation abstraite, qui pourra faire dire de ces citoyens-là ce que Charles Péguy (1873-1914) disait de certains de ses contemporains : « Ils ont les mains propres, mais ils n'ont pas de mains. »

---

[30] Écrire des *Éléments de…* est, en règle générale, d'une difficulté très supérieure au fait d'écrire de simples *Leçons de…*

[31] Voir Jean Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique* (Gauthier-Villars, 1979).

[32] Dans son livre *Modern Geometry with Applications* (Springer-Verlag, 1994).