

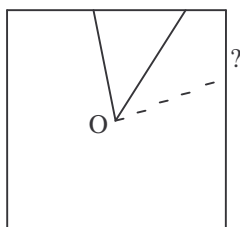
QUESTIONS & RÉPONSES

La conceptualisation mise en place ci-après constitue le fondement de l'ensemble des développements présentés dans cette encyclopédie : elle permet en effet de formuler un schéma essentiel en matière de création et de diffusion de connaissances et de savoirs – de praxéologies. Ce schéma éclaire tant le travail du professeur que de l'élève, aussi bien dans le cadre usuel de la classe que dans des dispositifs de formation plus récemment créés dans le système scolaire français, tels les IDD et TPE.

1. Activités humaines et questionnements

1.1. L'activité d'une personne ou d'un groupe de personnes les conduit presque inévitablement à s'interroger sur les objets, les conditions et les contraintes de leur activité, dès lors notamment que ces objets, conditions ou contraintes semblent faire obstacle à l'activité envisagée.

1.2. D'une manière plus formelle, on peut dire que c'est dans le cadre d'une certaine tâche ✓ (tâche « coche ») qu'elle doit accomplir à l'intérieur d'une certaine institution I qu'une personne x va rencontrer certaines difficultés qui la conduiront à soulever – en général au sein d'un collectif X – une ou plusieurs **questions** Q . Pour ne prendre qu'un exemple très simple, imaginons que, lors d'un goûter d'enfants (✓), l'un (x) des adultes responsables (X) veuille découper un gâteau « carré » en parts d'égal volume (t), alors même qu'il a déjà découpé une part (voir la figure).



La question Q qui s'impose est ici : comment déterminer un découpage adéquat ?

1.3. Derrière la question soulevée, une **tâche** se profile : celle consistant à apporter une **réponse** R à la question Q posée. Étymologiquement, *question* renvoie tout à la fois à une demande de renseignement et à la tâche consistant à rechercher ce renseignement, à la **quête** de l'information demandée. Ce double sens solidaire, que l'on gardera présent à l'esprit, ainsi que le caractère **social** de toute « question » – une question se partage en général avec d'autres –, sont inscrits dans l'histoire du mot, comme l'indique le *Dictionnaire historique de la langue française* dans le passage suivant :

QUESTION n.f. est emprunté (v. 1119) au latin *quaestio* [...]. Le mot, qui désigne la recherche en général, s'est spécialisé en droit au sens d'« enquête », « interrogatoire », plus spécialement « enquête avec torture », et dans la langue philosophique « interrogation », discussion. [...]. Le mot, sans reprendre le sens général du latin, réservé en français à *quête* et à *recherche*, a été emprunté pour désigner une demande faite en vue d'une information, d'un éclaircissement. Avant la fin du XII^e s., *question* désigne un point qui prête à discussion, soulève un débat théorique ou pratique (v. 1190).

Une question, c'est ainsi (en français) une demande d'information, d'éclaircissement, mais c'est aussi (en latin) l'action entreprise – l'enquête, la recherche, la « quête » – en vue d'apporter une réponse R à la question Q posée.

2. Création de connaissances et déni de problématique

2.1. La **situation du monde** évoquée ci-dessus – le gâteau à découper – relève d'un type de situations qu'on notera de manière générique $s = \{ \sigma ; \checkmark ; x, x', x'', \dots \}$ et dans lesquelles un collectif de personnes, x, x', x'' , etc., doit réaliser une tâche ✓ à propos d'un système σ : en l'espèce, σ est un groupe d'enfants et ✓ consiste à organiser et à gérer un goûter pour ces enfants. Ce que l'on pourra énoncer ainsi :

Tâche ✓₀. Trois parents d'élèves x, x', x'' ont organisé un goûter pour des enfants.

À cet exemple initial, ajoutons quatre nouveaux exemples, qui fourniront un petit matériel à l'analyse à conduire :

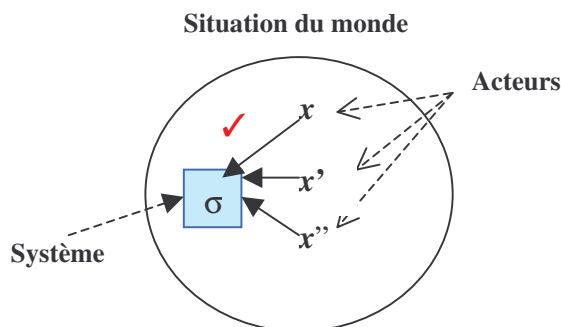
Tâche ✓₁. Un paysan, x , doit expédier un lot de 250 œufs dans des boîtes pouvant contenir chacune 6 œufs.

Tâche ✓₂. Trois vacanciers, x , x' , x'' , doivent se partager la somme de 172 € qui, à l'issue de leurs vacances, reste dans la caisse commune créée pour faire face aux frais quotidiens collectifs et dans laquelle ils ont versé en tout, respectivement, 380 €, 420 €, 440 €.

Tâche ✓₃. L'intendant d'un lycée, x , doit fabriquer une jauge pour la cuve à mazout de l'établissement, laquelle est une cuve cylindrique de 3 m de long et de 1,20 m de diamètre, reposant sur sa longueur, et comportant une ouverture sur sa partie supérieure.

Tâche ✓₄. Un étudiant en mathématiques, x , doit rédiger un mémoire sur la découverte des quaternions par William Rowan Hamilton (1805-1865).

Dans chaque cas, la situation du monde peut être schématisée comme ci-après.



2.2. Il se peut bien sûr que la tâche ✓ soit, pour les acteurs de la situation s , une tâche *routinière*, qui « ne leur pose pas de problème ». Mais il se peut aussi que, dans l'accomplissement de ✓, surgisse une sous-tâche *t problématique pour eux*, ainsi qu'on l'a imaginé dans le cas du gâteau et comme on peut l'envisager pour les tâches prises pour exemples ci-dessus :

Tâche t_0 . L'un des parents, x , a coupé une portion d'un gâteau carré et se demande comment découper encore quatre portions d'égal volume.

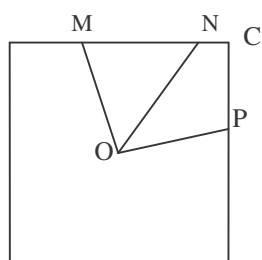
Tâche t_1 . Le paysan x se demande combien de boîtes il doit se procurer.

Tâche t_2 . Les vacanciers x , x' , x'' se demandent comment ils doivent se partager la somme restante de façon que chacun d'eux ait contribué également aux frais collectifs.

Tâche t_3 . L'intendant x se demande comment il doit graduer la baguette pour obtenir, par simple lecture, le volume de mazout contenu dans la cuve.

Tâche t_4 . Ayant trouvé dans sa documentation l'indication, donnée par Hamilton lui-même, que cette découverte eut lieu très précisément le 16 octobre 1843 – après plus de quinze années de recherches infructueuses –, l'étudiant x se demande quel jour de la semaine tombait le 16 octobre 1843.

2.3. Une telle situation de problématicité est une *condition nécessaire de création de connaissances* –



de ces connaissances, exactement, qui permettront d'accomplir la tâche problématique t (et, du même coup, quelques-unes des tâches, t' , t'' , etc., du même *type* que t). Dans le cas du gâteau carré à découper de manière équitable (t_0), on découvrira ainsi le petit théorème de géométrie suivant :

θ_0 . Pour que deux parts de gâteaux, telles MON et NOP sur le schéma ci-contre, aient même surface (et donc même volume), il faut et il suffit qu'elles aient des bords extérieurs *de même longueur*, soit ici que l'on ait $MN = NC + CP$.

Si a est la longueur du côté du carré et si le bord extérieur de la portion a pour longueur ℓ , l'aire de la portion sera en effet égale à $\frac{1}{4} a \times \ell$, que le bord du morceau de gâteau *comporte un coin ou non*.

2.4. Par contraste, le fait que ce résultat – mathématiquement trivial – de géométrie élémentaire soit de fait fort peu diffusé dans la culture mathématique courante – le lecteur de ces lignes le connaissait-il ? – suggère que, socialement, on tend à gérer au jugé l'élément de problématicité envisagé ici : pour découper le gâteau, l'adulte x décidera vraisemblablement de procéder approximativement, en utilisant ensuite son autorité d'adulte pour imposer sa manière de faire à des enfants qui pourraient en contester

la justesse et, du même coup, en mettre en cause la relative injustice ! D'une manière très générale, la plupart des situations de problématicité font ainsi l'objet d'un *déni*. Plus exactement, il semble fréquent que, après avoir, dans un premier temps, reconnu fugitivement une certaine problématicité à telle tâche *t* rencontrée dans une situation du monde donnée, les acteurs de la situation en viennent, dans un deuxième temps, à *nier* cette problématicité entraperçue, en renonçant à accomplir *t*, ou, plus souvent peut-être, en l'accomplissant « à peu près ». C'est ainsi que, dans les autres situations précédemment invoquées, l'attitude des acteurs pourra être la suivante.

✂*t*₁. Le paysan décide de se procurer une quantité de boîtes estimée au jugé supérieure à celle strictement nécessaire, avec l'idée de conserver les boîtes non utilisées en vue d'un usage ultérieur.

✂*t*₂. Les vacanciers décident, dans un flou généreux et opportun (« Mais non ! Toi tu as payé la pizza l'autre jour, et ça on l'a pas compté... »), que telle répartition, déterminée « à l'intuition », est *grosso modo* acceptable, et s'en tenir là.

✂*t*₃. L'intendant décide, faute de mieux, de construire une graduation proportionnelle à la hauteur du mazout dans la cuve, et, après quelques déboires (la jauge ainsi graduée surévalue la quantité de mazout lorsque celle-ci est presque épuisée, par exemple), se contente de minorer (ou de majorer), au jugé, le volume résultant de ses mesures.

✂*t*₄. L'étudiant décide que l'indication qu'il recherchait (le jour de la semaine où tombait le 16 octobre 1843) est un détail inutile, ridicule, qui n'apporte rien, etc.

Dans de tels cas, sans doute nombreux, il n'y a pas même *problématisation* de la situation, dont la problématicité potentielle n'est pas reconnue. À plus forte raison, la situation ne saurait être, en ce cas, à l'origine de la création de *connaissances nouvelles* pour les acteurs de la situation.

3. La notion de problème et sa place dans la culture scolaire

3.1. Lorsque l'élément de problématicité rencontré n'est pas « refoulé », lorsque, au contraire, on en reconnaît la problématicité en lui donnant d'une façon ou d'une autre un caractère *public* au sein d'un certain collectif *X*, on dira que la question rencontrée – comment, par exemple, découper un gâteau carré en parts égales ? – prend le statut de *problème*¹.

3.2. Depuis toujours, en particulier, l'« aventure mathématique » repose sur la possibilité offerte à ses membres par une *communauté* aux contours flous et toujours redessinés, celle des « mathématiciens », de poser, devant leurs pairs, des problèmes nouveaux (ou que l'on croit tels), en vue de susciter intérêt pour le problème proposé, émulation pour le résoudre et attention à l'endroit des éléments de solution proposés.

3.3. Pour désigner ce que longtemps on a appelé, tout simplement, une *question de mathématiques*, le mot de *problème* ne s'est en vérité imposé en français que depuis le début du XVII^e siècle. Le mot dérive, par le latin *problema*, qui désigne une question à résoudre, d'un mot grec signifiant « ce que l'on a devant soi, et spécialement un obstacle, une tâche, un sujet de controverse, une question à résoudre² ». Le grec *probléma* est en effet formé à partir de *pro*, « devant », et *ballein*, « lancer » : l'idée essentielle est celle d'une difficulté, d'un défi – intellectuel, par exemple – que l'on *lance* (*ballein*) devant soi (*pro*), *au sein d'une communauté*.

3.4. Il s'agit là très exactement de ce que fait quotidiennement le professeur de mathématiques dans cette communauté *X* de « mathématiciens » qu'est – ou devrait être – une classe de mathématiques. Mais ce type de situations – une communauté au sein de laquelle quelqu'un « lance un problème » – n'est nullement propre à l'École. Longtemps, ainsi, l'usage a existé de proposer des problèmes de mathématiques *par voie d'affiche*, pratique qui fut par exemple à l'origine d'un épisode important dans la vie de René Descartes (1596-1650), ainsi que le raconte son biographe Adrien Baillet dans sa *Vie de Monsieur Descartes* (1692) :

[En 1618] il arriva qu'un inconnu fit afficher, par les rues de Breda, un problème de mathématiques pour le proposer aux savants, et en demander la solution. M. Descartes, voyant le concours des passants qui

¹ Le problème du gâteau carré apparaît par exemple dans l'ouvrage classique de H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry* (John Wiley, New York, 1969), sous la forme suivante : *Can a square cake be cut into nine slices so that everyone gets the same amount of cake and the same amount of icing?*

² *Dictionnaire historique de la langue française* (Le Robert, 1993).

s'arrêtaient devant l'affiche conçue en flamand, pria le premier qui se trouva auprès de lui de vouloir lui dire en latin ou en français la substance de ce qu'elle contenait. L'homme, à qui le hasard le fit adresser, voulut bien lui donner cette satisfaction en latin ; mais ce fut à condition qu'il s'obligerait à lui donner de son côté la solution du problème qu'il jugeait en lui-même très difficile. M. Descartes accepta la proposition d'un air si résolu, que cet homme, qui n'attendait rien de semblable d'un jeune cadet de l'armée, lui donna son nom par écrit avec le lieu de sa demeure, afin qu'il pût lui porter la solution du problème quand il l'aurait trouvée. M. Descartes connut par son billet qu'il s'appelait Isaac Beeckman, et qu'il était principal du collège de Dordrecht. Il ne fut pas plutôt retourné chez lui que, s'étant mis à examiner le problème de l'homme inconnu sur les règles de sa méthode, il en trouva la solution avec autant de facilité et de promptitude que Viète en avait apporté pour résoudre le fameux problème qu'Adrien Romain avait proposé autrefois à tous les mathématiciens de la terre.

La comparaison avec un épisode plus ancien montre la pérennité de l'usage : Adrien Romain, ou plutôt Adriaan van Roomen (1561-1615), avait en effet lancé en 1593, à Anvers, un défi à tous les mathématiciens du monde, défi auquel François Viète (1540-1603) répondit dans un écrit intitulé sobrement *Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum* (Paris, 1595). L'historien Morris Kline fait de cet épisode le bref récit suivant ³ :

The problem was to solve an equation of the forty-fifth degree in x . Henry IV of France sent for Vieta, who recognized that the problem amounted to this: Given the chord of an arc, to find the chord of the forty-fifth degree of that arc. This is equivalent to expressing $\sin 45A$ in terms of $\sin A$ and finding $\sin A$. If $x = \sin A$ then the algebraic equation is of the forty-fifth degree in x . Vieta knew the problem could be solved by breaking the equation up into a fifth-degree equation and two third-degree equations; these he solved quickly. He gave the 23 positive roots but ignored the negative ones.

3.5. L'usage de « mettre au concours » des questions de mathématiques s'est maintenu jusqu'à nos jours, quoique dans des formes autres que celle de l'affichage public. Les problèmes de recherche et le contrôle de leur originalité sont aujourd'hui le fait des communautés savantes internationales, et leur publicité se fait à travers revues scientifiques, séminaires, colloques et congrès ⁴. Il existe en outre, en retrait par rapport au front de la recherche, tout une activité proposée aux mathématiciens les plus divers, du spécialiste jusqu'au professeur de l'enseignement secondaire, dans nombre de revues professionnelles. Ainsi en va-t-il par exemple de l'*American Mathematical Monthly* ou du *Mathematics Magazine* aux États-Unis, de *Quadrature*, *Tangente* ou du *Bulletin de l'APMEP* en France, et de bien d'autres revues encore, qui proposent régulièrement une rubrique de problèmes à leurs lecteurs.

3.6. La pratique immémoriale que le mot de problème symbolise existe sans doute insuffisamment dans la culture scolaire d'aujourd'hui, du moins *hors de la classe*, et cette situation d'enfermement ne laisse pas d'avoir des conséquences négatives sur l'image de l'enseignement des mathématiques dès lors que la résolution de problèmes, au reste plus ou moins stéréotypés, apparaît comme une singularité du cours de mathématiques et de rares autres. Dans une visée de désenclavement, diverses initiatives – dans la classe, dans l'établissement, et au-delà – ont toutefois été prises au cours des décennies passées, comme en témoigne le regain d'intérêt actuel pour les *compétitions mathématiques*, dont la multiplication récente est remarquable : par delà le célèbre *concours général*, créé en 1744 et classiquement réservé à une élite peu nombreuse, existent aujourd'hui diverses compétitions de masse, internationales comme les *Olympiades internationales de mathématiques* (organisées à partir de 1959), nationales tels le *Kangourou des collèges* et le *Kangourou des lycées* (créés en Australie dès 1976) ou les *Mathématiques sans frontière*, avec, selon le cas, possibilité de participer à titre individuel ou en équipe ⁵.

³ *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford University Press, New York, 1972), p. 240. Pour une analyse fouillée du problème de Romain et de la solution de Viète, voir Herman H. Goldstine, *A Historical Numerical Analysis From the 16th through the 19th Century* (Springer-Verlag, New York, 1977), p. 33 et suiv.

⁴ La pratique du « défi » mathématique n'est évidemment pas à l'abri de l'erreur quant à l'originalité du problème proposé. C'est ainsi que, en 1880, à l'instigation de deux des meilleurs mathématiciens français du temps, Charles Hermite (1822-1901) et Camille Jordan (1838-1922), l'Académie des sciences proposa un problème de théorie des nombres qui, en fait, avait été résolu quelque quatorze ans plus tôt par le mathématicien britannique Henry John Stephen Smith (1826-1883).

⁵ Voir Pierre Legrand, *Les maths en collège et en lycée* (Hachette, Paris, 1997), p. 78-85.

3.7. Dans cette perspective, mais à l'échelon de l'*établissement* (ou d'un groupement d'établissements), on peut envisager de proposer aux élèves d'un même niveau de classe un *problème du mois* (par exemple), avec une récompense (plus ou moins symbolique) pour les auteurs des meilleures solutions⁶. Mais l'essentiel, pourtant, n'est pas là : c'est *dans la classe*, qui doit redevenir la terre d'élection des plus fortes aventures intellectuelles, et non dans ses à-côtés, que les problèmes de mathématiques *cruciaux* – qui font avancer le temps didactique – doivent être « lancés ».

4. Formation et problématisation du monde

4.1. Les exemples examinés plus haut suggèrent que, lorsqu'une situation du monde relève de l'activité *privée*, sa capacité à engendrer des problèmes – et donc, à terme, des connaissances – dépend fortement des acteurs de la situation : *les différences entre personnes jouent alors à plein*. Telle situation qui, pour telle personne, sera le point de départ d'une véritable *enquête épistémologique*, et, en conséquence, de tout un *apprentissage*, n'éveillera chez la plupart aucune forme d'interrogation ! La pratique *ordinaire* des situations du monde n'a ainsi, en elle-même, qu'une capacité fort limitée à engendrer des connaissances : *les savoirs n'émergent pas spontanément des pratiques*.

4.2. C'est ce dernier constat qui fonde en grande partie le travail du professeur et, plus généralement, de tout formateur : pour que des connaissances se créent pour la personne x , le formateur y doit, contre la croyance toujours résurgente en une facile autodidaxie, *forcer* x et ses compagnons d'étude à reconnaître, à assumer, à affronter la problématicité des situations du monde que y leur aura imposé de rencontrer. De là *le rôle irremplaçable des professeurs et des formateurs de tous types* dans la diffusion sociale (et en particulier scolaire) des connaissances : nul ne saurait être de manière exclusive et durable son propre formateur.

4.3. L'exigence précédente ne signifie pourtant nullement que ce soit au professeur seul de poser, *motu proprio*, toutes les questions à étudier : il lui appartient au contraire d'aider les élèves à formuler, sinon les grandes questions fondatrices du curriculum, du moins certaines des questions en lesquelles se déploie leur étude, et cela, plus largement, afin de leur permettre d'acquérir une vraie capacité à assumer la *fonction de problématisation* essentielle en tout abord critique, scientifique ou citoyen, du monde. Si, selon le contexte de formation (selon que l'on est « en classe » ou « en TPE » par exemple), les élèves, travaillant sous la direction du professeur, peuvent ou non concourir à faire émerger les tâches ✓ génératrices de l'étude, en revanche il leur écherra toujours d'identifier, sous la houlette du professeur, la ou les tâches problématiques t « enchâssées » dans les tâches ✓, de formuler la ou les questions Q appelées par les éléments de problématicité ainsi recensés (« Comment accomplir les tâches du type de t ? »), et, au-delà, d'explicitier les questions *cruciales* organisant l'étude de la ou des questions Q .

4.4. S'agissant du problème du gâteau carré, par exemple, une question cruciale Q' sera : « De quoi dépend *a priori* l'aire d'un « morceau » comportant un coin comme ONCP ci-dessus ? » Une réponse R' ayant été formulée et validée (« L'aire dépend *a priori* de la longueur a du côté du carré et des longueurs $\ell_1 = NC$ et $\ell_2 = CP$ »), une seconde question, Q'' , pourra émerger : « Comment calculer l'aire du morceau ONCP en fonction de a , de ℓ_1 et de ℓ_2 ? ». Et ainsi de suite. Par contraste on proscriera autant que possible la rhétorique des énoncés scolaires de « problèmes » qui refusent à l'élève toute rôle dans le travail de problématisation en le cantonnant dans la posture d'*aide-mathématicien*, comme l'illustre l'exemple suivant (où l'on se réfère à la figure déjà mentionnée, et auquel la troisième question donne tout de même une touche sagement inhabituelle) :

Le carré ci-dessus représente un gâteau que l'on souhaite découper en plusieurs morceaux.

1. On considère le « morceau » OMN. On pose $\ell = MN$. Montrer que l'on a : aire de OMN = $\frac{1}{4} a \times \ell$.

2. On considère le « morceau » ONCP. On pose $\ell_1 = NC$ et $\ell_2 = CP$.

a) En écrivant que l'aire de ONCP est égale à la somme des aires des triangles ONC et OCP, montrer que

l'on a : aire de ONCP = $\frac{1}{4} a \times (\ell_1 + \ell_2)$.

b) Sous quelle condition (exprimée à l'aide de ℓ , ℓ_1 et ℓ_2) les morceaux OMN et ONCP ont-ils même aire ?

⁶ On pourra pour cela s'inspirer du calendrier mensuel de problèmes – un problème par jour ! – proposé par la revue *The Mathematics Teacher* du National Council of Teachers of Mathematics états-unien.

3. Dédurre de ce qui précède une manière pratique de découper un gâteau carré afin d'obtenir des parts égales.

4.5 D'une manière générale, toute effort de formation suppose, de la part des personnes en formation, une activité régulière et soutenue de problématisation de cette partie du monde social ou naturel sur laquelle porte la formation. Cette exigence s'impose formellement tant au collégien qu'au lycéen ou à l'étudiant et vaut plus sûrement encore – ainsi que pour tout adulte en formation – pour le professeur en formation initiale ou continue. Dans tous ces cas, il semble au reste indispensable de fixer un temps *commun* dévolu proprement à la formulation écrite systématique, par chacun des membres du groupe de formation – y compris dans une classe de collège ou de lycée –, de ce qui aura pris pour elle ou lui l'apparence de *questions vives* au cours de la période passée. Un tel dispositif est le lieu d'un moment important de formation personnelle, qui donne à chacun l'occasion de se centrer mentalement sur l'expérience vécue des jours précédents : sauf à fuir la réalité, on ne peut manquer – au double plan de l'action et de la pensée de l'action – d'y repérer certaines difficultés effectivement rencontrées ou simplement anticipées à partir des situations du monde traversées.

5. Le temps de questionner, le temps de répondre

5.1. Le rituel des « questions vives de la période » – semaine ou quinzaine, par exemple – ne trouve pas sa fin en lui-même : il est bien entendu l'occasion pour chacun d'apporter son écot à l'effort *collectif* de formation. En faisant connaître la difficulté qui lui paraît la plus prégnante dans son expérience de formation récente, chacun contribue solidairement à nourrir et à réguler la dynamique partagée de la formation : faire connaître les difficultés que l'auto-analyse de sa pratique et de sa pensée met au jour est ainsi un *devoir* à l'endroit des formateurs comme du groupe tout entier.

5.2. Cette contribution de chacun à la formation de tous ne saurait être annulée parce que, entre le temps où l'on a rencontré telle difficulté et le temps de sa formulation écrite, la question soulevée aurait été « réglée ». Pour deux raisons. D'une part, si l'on peut imaginer un instant qu'elle a été « réglée » pour le proposant, cette difficulté ne l'est sans doute pas pour chacun des membres du collectif en formation : oublier ce fait, ce serait, si peu que ce soit, s'enfermer dans un *individualisme* régressif (« *ma* question, la réponse à *ma* question, pour *moi* »), que tout éducateur doit aujourd'hui avoir à cœur de combattre *en lui et autour de lui* ; ce serait surtout oublier qu'une difficulté rencontrée dans l'exercice du métier doit être regardée comme un *problème de la profession*, que l'on doit contribuer à faire reconnaître par la profession. D'autre part, en ce qui concerne plus particulièrement les professeurs en formation, ce serait se méprendre lourdement de croire qu'une question professionnelle, même d'apparence anodine, puisse faire l'objet d'une réponse définitive, qui embrasse *l'ensemble* des situations concrètes où cette difficulté pourra surgir : de fait, sa résurgence ultérieure ne manquera pas en général de faire apparaître la fragilité du « règlement » allégué ! La première vertu professionnelle, par-delà l'humilité qui en constitue la condition de possibilité, est le courage de tenir toute « réponse », même durement construite, pour *provisoire*, révisable, promise à être un jour éventuellement proche *déconstruite et reconstruite*.

5.3. Formellement, le travail du groupe de formation consistera donc à formuler des questions Q , à prendre connaissance collectivement de ces questions, puis à se lancer de manière concertée dans la construction de réponses R à certaines de ces questions au moins. Plusieurs exigences doivent à cet égard être soulignées. Tout d'abord, quelle que soit la question Q , on rencontre fréquemment autour de soi – voire « en soi » – des réponses toutes faites, R^\diamond , souvent « estampillées ⁷ » par une institution I parfois influente et quelquefois même dominante, réponses qu'il convient de *déconstruire* afin même de *reconstruire* une réponse propre, que l'on pourra noter R^\heartsuit , sans bien sûr exclure la possibilité que cette reconstruction reprenne à l'identique, comme optimale, l'une des réponses R^\diamond disponibles dans la culture. Même si, en effet, on croit disposer de « bonnes » réponses R , il est nécessaire de *réexaminer régulièrement ces réponses* pour apprécier leur écart à l'optimum local, étant donné les conditions changeantes sous lesquelles le professionnel doit exercer son métier : telle est d'ailleurs le but de la formation « continue », *qui ne vise donc pas seulement* à aider à construire *ab ovo* des réponses à des *questions nouvellement apparues* mais qui a d'abord pour objet de relancer l'étude de questions anciennement « réglées » – parfois par un pur déni de problémativité ! On notera en passant que la

⁷ De là la notation R^\diamond utilisée, que l'on lira « R poinçon ».

différence la plus sensible entre professeurs débutants et professeurs « confirmés » tient *a priori* à ceci que, pour ces derniers, **beaucoup plus** de réponses R existent d'ores et déjà, ce qui rend normalement **plus lourd** le travail de déconstruction critique à opérer. Mais ce travail n'est pas moins **fondamental** pour un débutant qui, en dépit de son absence préalable de pratique, a pu absorber comme allant de soi **une foule de réponses toutes faites**, parfois **en fort décalage** avec l'optimum, à des questions qu'il n'a jusque-là réellement ni rencontrées ni, à plus forte raison, **étudiées**.

5.4. Une autre exigence cardinale mérite un commentaire spécifique : elle concerne la **durée** dans laquelle il convient d'inscrire l'étude de toute question, professionnelle ou autre. Contre l'habitus que tend à engendrer en chacun de nous une certaine culture scolaire – dont la vertu de **patience** n'est pas le fort, mais qu'il convient précisément de travailler à faire évoluer sur ce point –, la construction d'une réponse R à une question Q ne saurait être quasi « instantanée » : elle suppose une suite d'ébauches de réponse R_1, R_2, \dots , plusieurs fois reprises, « démontées », enrichies, élaborées à nouveaux frais, et qui, dans le meilleur des cas, **sembleront « converger »** vers une réponse « définitive » quoique hypothétique, R_∞ . L'effort de formation requis tant des élèves que de leurs professeurs doit à cet égard s'inscrire en faux contre **l'habitus d'immédiateté**, qui, intenable par nature, tend en outre à réduire *a priori* toute réponse espérée à un simple « truc » qui devrait se concevoir, s'énoncer et être mis en œuvre « simplement », « sans grands mots », « sans faire de chichis », selon les canons de toute épistémologie populiste, comme si les questions qui font la substance d'un cours de mathématiques ou du métier de professeur de mathématiques étaient tout en surface, comme dénuées de profondeur.

5.5. On notera enfin une conséquence de la non-immédiateté de la construction des réponses espérées : des activités d'étude et de recherche que l'attaque d'une question Q détermine, il est nécessaire de se donner des **comptes rendus** « complets », du moins non expurgés des éléments qui, pour le ou les rédacteurs, **ne feraient pas sens immédiatement** et dont, en vérité, plusieurs ne pourront porter fruit que **dans la durée**, moyennant un patient travail de « rumination ». La chose vaut, concrètement, aussi bien dans un séminaire de formation de professeurs que dans une classe de collège ou de lycée – dont le professeur doit, de concert avec les élèves, gérer la **mémoire didactique** à l'aide notamment de **bilans d'activités**.

6. Produire une réponse : vers une nouvelle épistémologie scolaire

6.1. Apporter une réponse R à une question Q , ou, comme on le dira aussi, **développer** une telle réponse⁸, se réalise sous des conditions et des contraintes qui dépendent de manière **spécifique** du contenu de la question Q : on ne répond pas à la question « Comment déterminer le nombre de boîtes de 6 œufs juste suffisant pour transporter 250 œufs ? » comme on répond à la question « Quel jour de la semaine était le 16 octobre 1843 ? », par exemple. Pourtant, dans tous les cas, les « étudiants⁹ » x qui tentent de construire R doivent se plier à une **discipline** minimale : rechercher – et exploiter adéquatement – les **ressources didactiques** qui pourraient permettre d'élaborer une réponse R idoine. Ces ressources comportent essentiellement des **connaissances** et des **savoirs**, des **outils d'expérimentation, de raisonnement et de calcul**, toutes réalités qu'on rangera dans la catégorie très large des **œuvres**, produits intentionnels de l'activité humaine (quand bien même leurs effets **réels** ne seraient pas **tous** délibérés), et plus particulièrement dans cette sous-catégorie essentielle des œuvres susceptibles de fonctionner comme **outils de création d'autres œuvres**.

6.2. Par un phénomène de **méprise épistémologique**, la construction d'une réponse R à une question Q vient généralement buter sur le problème de l'identification des œuvres susceptibles d'apporter à cette entreprise des matériaux et des outils pertinents. Un épisode bien documenté de la guerre des codes secrets fournit de ce type d'obstacles un exemple frappant : avant la Seconde Guerre mondiale, les services britanniques chargés de « casser » les codes employés par l'armée allemande, qui utilisait la

⁸ En un sens technique du mot, développer c'est **concevoir, créer, mettre au point un « produit »**, quelle que soit la nature – matérielle ou immatérielle – de l'entité à produire.

⁹ En français, le mot d'étudiant a pris une acception restrictive, ce qui n'est pas le cas en anglais par exemple, où l'on parle aujourd'hui encore de *student of topology* pour désigner un spécialiste de topologie ; le castillan, lui, distingue l'*estudiante*, l'étudiant au sens français du terme, de l'*estudioso*, l'étudiant au sens large, **celui qui étudie** une question ou un domaine de questions. C'est en un tel sens élargi que ce mot est pris ici : il s'applique au « savant » comme à l'élève de l'école primaire.

fameuse machine *Enigma*, avaient cru bon de recourir à des... épigraphistes, spécialistes des langues anciennes, lesquels, par une identification culturelle trop rapide, furent regardés en un premier temps comme les mieux à même de déchiffrer les messages interceptés¹⁰. Dès 1932, les services de renseignement de divers pays (France, Grande-Bretagne, Pologne) disposèrent des instructions d'utilisation de la machine, qui devaient permettre d'en inférer les câblages. Seuls les Polonais y parvinrent, pour une raison qu'un historien de ce domaine rapporte dans les termes suivants¹¹ :

The difference was that the Polish department employed three energetic mathematicians, who were able to use the papers to deduce the wirings. Highly ingenious observations, good guessing, and the use of elementary group theory, produced the rotor wirings.

Dès la fin des années 1920, les services polonais avaient en effet recruté trois étudiants en mathématiques, dont l'un fut d'ailleurs envoyé se former à l'université de Göttingen, haut lieu des mathématiques allemandes, dont David Hilbert (1862-1943) était alors le chef de file incontesté. Par contraste, ce n'est qu'en 1938, à la veille de la guerre, que les services britanniques feront appel à des mathématiciens de haut niveau, dont surtout Alan Turing (1913-1954), qui réussit (avec W. G. Welchman) à percer le code allemand et joua ainsi, indirectement, un rôle décisif dans l'issue de la bataille de l'Atlantique. Les savoirs pertinents étaient en l'espèce des savoirs de mathématicien plutôt que des savoirs d'helléniste ou de latiniste.

6.3. La capacité à reconnaître les sous-tâches t de nature essentiellement mathématique qui peuvent surgir dans l'accomplissement d'une tâche \checkmark donnée reste faiblement développée dans la culture scolaire actuelle. En outre, même lorsqu'une telle sous-tâche est facilement identifiable, le problème de la capacité à mobiliser des outils mathématiques idoines reste largement non résolu. Quelles « œuvres » mathématiques, s'il en existe, seraient ainsi les plus à même de permettre de déterminer quel jour de la semaine tombait le 16 octobre 1843 ou le 14 juillet 1789 ? Il est rare que l'éducation scolaire ou universitaire se penche sur ce genre de questions. De plus, même lorsque les difficultés de nature mathématique inhérentes à une tâche \checkmark sont reconnues et résolues, d'autres sources de problématicité, *relevant d'autres domaines de connaissance*, peuvent rester ignorées. De quelle « science » relèvent par exemple les informations en matière de *calendrier* sans doute nécessaires pour parvenir à une réponse satisfaisante à la question du jour de la semaine ? Existe-t-il une « science des calendriers » ? Ou bien ces informations sont-elles à chercher dans une discipline de connaissance plus vaste dont elles ne seraient qu'un sous-produit ? En chaque cas, une enquête épistémologique s'impose.

6.4. Pour beaucoup de questions Q auxquelles on est amené à vouloir apporter une réponse, le champ de l'enquête épistémologique à conduire est *a priori* immense. Ainsi l'étude de la question « Comment assurer la paix et le calme, le respect et la convivialité dans une classe de collège ? » semble-t-elle devoir rechercher ses matériaux et ses outils à travers tout le continent des *sciences humaines et sociales* – psychologie de l'adolescent, psychologie sociale, sociologie, etc. Il est possible toutefois, sinon de réduire, du moins de *baliser* l'espace des œuvres à explorer en y recherchant prioritairement des réponses (ou des esquisses de réponses) R^\diamond afin d'alimenter le travail de développement de la réponse R^\heartsuit souhaitée (que l'on notera R pour simplifier). Un tel travail, en effet, se bâtera à partir des quatre « gestes » cardinaux que sont l'*observation* des réponses R^\diamond repérées et de la réponse R en construction, leur *analyse*, leur *évaluation* et, finalement, la « *publication* » de la réponse R élaborée¹². Bien entendu, la teneur en réponses R^\diamond du travail à conduire comme l'originalité de la réponse R produite peuvent varier beaucoup : dans quelques cas, R pourra (ou devra) être élaborée presque *ex nihilo* – « en partant de zéro » ou, comme on le dit en anglais, « *from scratch* », sans

¹⁰ L'épigraphie a pour objet l'étude des inscriptions gravées sur pierre, métal, etc. Son apport est essentiel dans la connaissance des sociétés antiques, et cela pour une double raison : parce que les archives plus périssables qui pourraient témoigner de ces cultures ont en grande partie disparu ; parce que l'usage de graver des inscriptions (dans la pierre notamment) jouait dans l'antiquité un rôle beaucoup plus important que de nos jours, ce qui explique le grand nombre de documents de cette sorte parvenus jusqu'à nous.

¹¹ Andrew Hodges, *Alan Turing, The Enigma of Intelligence* (Unwin Paperbacks, Londres, 1985), p. 170.

¹² Le latin tardif *publicatio* désigne l'action de dévoiler. C'est en ce sens qu'il convient d'entendre le mot ici : la « publication » de R renvoie au fait de faire connaître, de faire reconnaître, de mettre en débat, de défendre et d'illustrer la réponse R élaborée.

emprunter aucun matériau à des réponses R^\diamond introuvables (ou non trouvées !); dans d'autres cas, au contraire, la réponse R sera obtenue quasiment par le pur « recopiage », fréquemment peu critique, de l'une des réponses R^\diamond recueillies.

6.5. Le schéma précédent vaut pour toute *situation d'étude et de recherche*, dans laquelle on cherche à apporter une réponse R à une question Q , ce qu'on notera ainsi : $Q \rightsquigarrow R$. Plus précisément, on pourra faire apparaître sous la forme suivante les réponses $R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond$ utilisées comme points d'appui de la construction de $R : Q | R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond \rightsquigarrow R$ (ce qu'on peut lire : « Q connaissant $R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond$ mène à R ». Plus complètement, on introduira le collectif X des « étudiants » (au sens vu plus haut), le collectif Y des « aides à l'étude » (formateurs, professeurs, etc.), et l'on écrira $S(X; Y; Q) | R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond \rightsquigarrow R$, où $S(X; Y; Q)$ est le *système didactique* constitué par les collectifs X et Y « autour » de la question Q . (On peut évidemment avoir $Y = \emptyset$, mais on ne peut avoir $X = \emptyset$: dans le cas le plus simple, X est un singleton.) Ce schéma doit en général être compliqué pour rendre compte de manière plus juste des pratiques effectives d'étude. Dans un certain nombre de cas, en effet, on ne trouvera pas facilement de réponses R^\diamond toutes faites à la question Q que l'on entend étudier; ainsi qu'on l'a vu plus haut à propos de l'exemple du gâteau carré, on va alors étudier une succession de « questions cruciales » Q_1, Q_2, \dots, Q_p , ce qu'on notera : $Q \rightsquigarrow Q_1 \rightsquigarrow Q_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow Q_p$. C'est alors aux questions Q_i ($1 \leq i \leq p$) que l'on trouvera éventuellement des réponses R_i^\diamond disponibles dans la culture, enchâssées dans des œuvres O_i mathématiques ou non. Si une question Q_i n'a pas une ou des réponses R_i^\diamond « bien connues » dans la culture, on tentera d'amorcer une « régression cruciale » $Q_i \rightsquigarrow Q_{i1} \rightsquigarrow Q_{i2} \dots \rightsquigarrow Q_{ik}$; et ainsi de suite. Pour résumer les différents « arbres cruciaux » possibles, on se contentera le plus souvent d'indiquer les œuvres O_1, O_2, \dots, O_m que, *en fin de compte*, l'élaboration de la réponse R aura mobilisées d'une manière ou d'une autre; ce qu'on peut noter :

$$S(X; Y; Q) | O_1, O_2, \dots, O_m \rightsquigarrow R.$$

Pour ne prendre ici qu'un seul exemple, si l'on découvre qu'une certaine réponse, R_1^\diamond , à la question Q relative à la tâche t_3 ci-dessus – « Comment graduer la baguette ?... » – est fournie par la formule

$$v = 1080 \left[\arccos \left(1 - \frac{h}{60} \right) - \left(1 - \frac{h}{60} \right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{h}{60} \right)^2} \right]$$

qui, pour une hauteur h mesurée en centimètres (avec $0 \leq h \leq 60$), donne le volume v en litres (plus exactement, en dm^3), on pourra conclure que, parmi les œuvres mathématiques mobilisées pour produire cette réponse, figure la *trigonométrie* et, plus particulièrement, la « théorie » des fonctions trigonométriques *inverses* (théorie qui, en France aujourd'hui, ne s'étudie pas au secondaire). On supputera aussi qu'a été sollicitée une certaine connaissance, sans doute un peu sibylline pour maint lecteur – que signifie par exemple la précision « en litres (plus exactement, en dm^3) » ? – des *unités de volume*, ce qui relève d'une « œuvre » mal aimée de l'enseignement scientifique français, la *métrologie*. Mais si l'on rencontre pour seule réponse à la question Q la réponse R_2^\diamond consistant en une *table* dont un extrait est reproduit ci-après, table qui permettra à l'intendant de graduer sa jauge et répond donc à la question soulevée, on voit que l'analyse des œuvres « cristallisées » sera un travail véritable, dans la mesure où de telles œuvres n'affleurent plus dans la réponse R_2^\diamond observée.

4 cm	7 cm	10 cm	17 cm
35 litres	80 litres	135 litres	295 litres

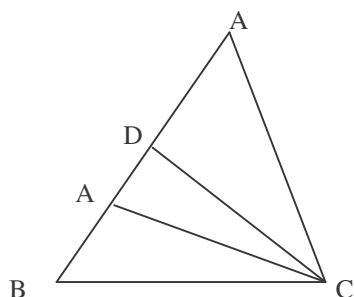
6.6. Il faut s'habituer à penser sous le schéma présenté jusqu'ici un ensemble de types de situations regardés – pour des raisons plus culturelles ou institutionnelles que scientifiques – comme disparates. Le premier type de situations est celui qui prévaut ordinairement dans la classe de mathématiques non renouée : la question *mathématique* Q n'est posée qu'*implicitement*, dans l'« énoncé » du problème (éventuellement présenté comme « activité ») proposé à la classe; le *topos* des élèves – leur marge d'autonomie didactique – est très chichement déterminé par le découpage de l'énoncé, qui fait de l'élève un aide-mathématicien plutôt que le protagoniste de l'étude de la question Q – question dont, sauf exception, l'élève n'a que faire et n'a pas même conscience; la responsabilité de la production de R est laissée au professeur – qui fournira le « corrigé » final; etc. Par contraste, le schéma explicité

jusqu'ici permet de situer cette geste traditionnelle dans un cadre large, qui autorise et appelle une évolution vers l'optimum : la question Q doit être clairement énoncée et la **responsabilité** de son étude **dévolue à la classe** ; l'élaboration de R peut prendre appui sur l'observation, l'analyse, l'évaluation de réponses R^\diamond rencontrées « dans la littérature » ; la formulation de R et sa « publication » (dans le cadre d'une synthèse écrite appropriée) doivent être clairement prises en charge par la **classe** travaillant sous la direction du professeur ; etc. Si, par exemple, la classe se demande comment démontrer la **réciproque** du théorème de Pythagore (après un travail collectif qui aurait révélé une confusion spontanée entre la propriété directe, antérieurement établie dans la classe, et sa réciproque, non encore officiellement rencontrée), elle pourra, retrouvant ainsi un geste **authentique** du travail mathématique, étudier sous la direction du professeur la démonstration suivante, « toute faite », qu'un élève ou une équipe d'élèves aura rattachée d'une recherche documentaire.

Dans ce qui suit, on suppose connu le théorème de Pythagore et on démontre sa réciproque.

Pour cela, on démontre que, si le triangle ABC n'est pas rectangle en A , alors $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$.

Dans ce but, on introduit un point D tel que l'angle \widehat{BDC} soit **droit** ; on va alors démontrer que l'on a : $AB^2 + AC^2 \neq DB^2 + DC^2$.



Pour choisir D , observons que, dans un triangle quelconque, au plus **un** des angles est droit ou obtus. Des deux angles \widehat{ABC} et \widehat{ACB} , l'un au moins est donc aigu : on suppose ici que c'est \widehat{ABC} . Soit alors D l'intersection avec]BA) de la perpendiculaire à (AB) passant par C . (Si D n'était pas sur la demi-droite]BA), comme \widehat{DBC} est nécessairement aigu comme angle non droit du triangle rectangle DBC , on aurait \widehat{ABC} obtus, contrairement au choix de B .)

Pour conclure, on procède alors à une **disjonction de cas**.

– Si $D \in]BA[$, on a $AB > DB$; comme $AC > DC$ (d'après le théorème de Pythagore), on a donc $AB^2 + AC^2 > DB^2 + DC^2$.

– Si $A \in]BD[$, on a : $AB^2 + AC^2 = (DB - DA)^2 + (DA^2 + DC^2) = (DB^2 + DC^2) + 2DA^2 - 2DA \times DB = (DB^2 + DC^2) - 2DA \times (DB - DA) = (DB^2 + DC^2) - 2DA \times AB < DB^2 + DC^2$.

Bien entendu, le travail de la classe sur cette démonstration ∂^\diamond devra aboutir à une démonstration ∂^\heartsuit « améliorée » – par exemple plus intelligible pour des élèves de 4^e –, qui sera alors « publiée » dans la synthèse relative au thème d'études travaillé – le « théorème de Pythagore ». L'intégration dans les ressources de travail de la classe de réponses R^\diamond , envisagée ici **en amont** de la production de R , pourra aussi se faire **en aval**, afin notamment d'évaluer la réponse R élaborée en la comparant, de plusieurs points de vue (intelligibilité, cohérence, complétude, etc.), à des réponses R^\diamond préexistantes – dont, au demeurant, on ne supposera pas *a priori* qu'elles sont en tous points meilleures que la réponse R de la classe.

6.7. L'emploi du schéma conceptuel que résume l'écriture $S(X; Y; Q) | O_1, O_2, \dots, O_m \rightsquigarrow R$ paraît sans doute plus évident dans le cas des IDD (itinéraires de découverte, en 5^e et en 4^e) et des TPE (travaux personnels encadrés, dans les classes de première). Dans chacun de ces cas, en effet, le **sujet** (de l'IDD ou du TPE) peut s'identifier à une **question** Q dont l'étude se fera dans une **problématique** en partie déterminée par l'inscription du sujet retenu dans un cadre plus large formé, pour ce qui est des IDD, par le choix d'un **thème** d'études découpé à l'intérieur de l'un des quatre **domaines** d'étude permanents officiellement désignés¹³, et, pour ce qui est des TPE, d'un **sous-thème** découpé dans l'un des six **thèmes** d'études nationaux de l'année¹⁴. Relève encore de ce même paradigme d'étude ce que le programme de mathématiques de la classe de 2^{de} nomme **thèmes d'étude** et qu'il vaudrait mieux

¹³ Ces domaines sont les suivants : *La nature et le corps humain, Les arts et les humanités, Les langues et les civilisations, La création et les techniques* (Voir <http://www.eduscol.education.fr/D0072/default.htm>.)

¹⁴ Deux de ces thèmes sont renouvelés chaque année. En 2005-2006, et pour la 1^{re} S par exemple, la liste des thèmes comporte, outre deux thèmes communs aux 1^{res} L, ES et S (*L'homme et la nature ; Ruptures et continuités*), quatre thèmes propres à cette classe (*Modèles, modélisation ; Croissance ; Risques naturels et technologiques ; Sciences et aliments*). (Voir <http://www.education.gouv.fr/bo/2004/18/MENE0400771N.htm>.)

appeler thèmes d'études *libres* (TEL), par contraste avec les thèmes d'études *imposés* (TEI) traditionnels¹⁵. De manière plus rigide peut-être que dans le cas des IDD ou des TPE (où l'on peut envisager de partir d'une question Q que l'on situera alors, selon le cas, dans un thème ou un sous-thème, lui-même inséré en un domaine ou un thème), la classe part, dans le cas des TEL, non d'une question Q , mais d'un thème θ qu'il s'agira alors de questionner, de « mettre en question(s) ». À propos par exemple du TEL « Caractérisation des éléments de \mathbb{D} et de \mathbb{Q} » (qui s'inscrit dans le domaine *Calcul et fonctions*, l'un des trois en lesquels se scinde le programme de 2^{de}), on pourra se demander comment, étant donné une fraction a/b (où $a, b \in \mathbb{N}^*$), on peut prévoir que son développement décimal sera *fini* (il s'agit alors d'un *décimal*), ou infini *sans partie apériodique*, ou infini *avec* partie apériodique de longueur *tant*, et comment encore il serait possible de prédire la longueur de la *partie périodique* du développement décimal – autant de questions en lesquelles pourra se déployer l'étude du TEL choisi. Bien entendu, la différence entre IDD et TPE d'une part, et TEL d'autre part, tient *a priori* à ce que l'étude d'une question Q fera appel, dans le premier cas, à des connaissances et savoirs relevant de *plusieurs disciplines*, tandis que, dans le second cas, elle ne mobilisera guère, en principe, que des ressources fournies par une discipline, qui est toutefois une discipline *plurielle*, les mathématiques. On verra que cette différence peut, à nouveau, être subsumée sous un schéma commun.

7. Disciplines de connaissance, disciplines d'étude et de recherche, disciplines de vie

7.1. On peut montrer que la question correspondant à la tâche t_4 vue ci-dessus – « Quel jour de la semaine était le 16 octobre 1843 ? » – trouve une réponse dans le système de formules

$$\begin{cases} j = J - 7[J/7] \\ J = Q + [2,6M - 0,2] + A + [A/4] + [S/4] - 2S - (1 + L)[M/11] \end{cases}$$

où j est le numéro du jour dans la semaine compté de 0 à 6 du dimanche au samedi (de sorte que, par exemple, $j = 1$ correspond au lundi), S désigne le nombre formé par les deux premiers chiffres de l'année (par exemple 18, pour 1843), A le nombre formé par les deux derniers chiffres (43, pour 1843), M le numéro du mois compté de 1 à 12 de mars à février (pour octobre, par exemple, $M = 8$), Q le quantième du mois (16, pour la date du 16 octobre 1843), et où $L = 1$ pour une année bissextile, = 0 sinon¹⁶. Pour la date du 14 juillet 1789, par exemple, on trouve ainsi $J = 14 + 12 + 89 + 22 + 4 - 34 = 107$ et donc $j = 2$: la prise de la Bastille eut lieu un mardi. Pour la date du 16 octobre 1843, on trouve, semblablement, $J = 16 + 20 + 43 + 10 + 4 - 36 = 57$ et donc $j = 1$: le 16 octobre 1843 tombait un lundi ; ce que l'étudiant x aurait pu apprendre de W. R. Hamilton lui-même, puisque celui-ci, peu avant sa mort, racontant sa découverte dans une lettre adressée à son fils, écrivait : « *But on the 16th of the month which happened to be a Monday and a Council day of the Royal Irish Academy...* »

7.2. On imagine aisément que la création – ou même la simple validation – du modèle mathématique ci-dessus ne peut se faire à l'aide seulement de connaissances mathématiques « pures » : des connaissances en matière calendaire sont ici indispensables¹⁷ ! L'étude de la plupart des questions Q qu'une personne ou une institution peut être amenée à se poser mobilise de même une diversité de types de connaissances – mathématiques, historiques, physiques, etc. D'une manière générale, le schéma qu'on a noté plus haut $S(X ; Y ; Q) | O_1, O_2, \dots, O_m \rightarrow R$ suppose le recours à des œuvres O_1, O_2, \dots, O_m *hétérogènes* au double plan culturel et épistémologique, qui relèvent souvent de *disciplines* de connaissance regardées comme étrangères les unes aux autres (ce qui dépend éminemment, en vérité, de la « cartographie » des connaissances en vigueur dans l'institution où la question Q doit être étudiée), configuration qui impose alors, au sein du système didactique $S(X ; Y ; Q)$, une *coopération interdisciplinaire* à laquelle la culture scolaire est restée longtemps rétive, même si une évolution est en cours avec les IDD et les TPE. On notera de ce point de vue que la fragmentation de la connaissance en *continents disciplinaires* (les mathématiques, « la » physique, « la » chimie, « la » biologie, « la » médecine, « la » droit, « la » géographie, etc.) tend à se poursuivre à l'intérieur de chacun d'eux, par la

¹⁵ Pour la liste des TEL, voir le programme de 2^{de} : <http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs2/default.htm>.

¹⁶ Une année est bissextile si son numéro est divisible par 4, sauf s'il est divisible par 100, auquel cas il doit être divisible par 400.

¹⁷ Pour s'en assurer, on pourra se reporter par exemple à l'ouvrage de Jean Lefort, *La saga des calendriers* (Pour la Science, Paris, 1998).

division en grands *domaines* et en *secteurs* plus réduits, ce qui conduit dans l'étude de Q au sein d'une discipline « unique » à emprunter des connaissances à des domaines ou à des secteurs séparés : à la coopération entre disciplines se substitue alors une coopération interdomaines (au sein d'une discipline donnée), intersectorielle (au sein d'un même domaine) ou interthématique (à l'intérieur d'un secteur déterminé). Dans tous les cas, la production d'une réponse R repose en conséquence sur un *mixte de connaissances* et suppose ainsi un certain *métissage épistémologique*, à l'opposé de la propension à « purifier » les disciplines par l'expulsion des contenus réputés allogènes – opération facilitée par le découpage des disciplines en domaines fermement distingués, eux-mêmes scindés en secteurs bien délimités.

7.3. Qu'elle se fasse d'une manière *intradisciplinaire* – à travers divers domaines ou secteurs des mathématiques par exemple – ou d'une façon *codisciplinaire* – en faisant « travailler » ensemble *plusieurs* disciplines¹⁸ –, la recherche des connaissances utiles à la fabrication d'une réponse R à la question Q suppose une *discipline adéquate*, qui consiste, à un premier niveau, en un usage judicieux, par le professeur comme par les élèves (sous la direction du professeur), de certains savoir-faire didactiques qui sont autant de *dialectiques* qu'on explicitera ici pour mémoire¹⁹.

1) La première dialectique est celle *du sujet et du hors-sujet* : contre le postulat scolaire du plus court chemin, qui ne conduit qu'à un but connu et déterminé à *l'avance*, elle pousse, dans une recherche en principe *ouverte*, à risquer le hors-sujet tant en matière de recherche documentaire par exemple que dans le choix des questions Q_1, Q_2 , etc., engendrées par l'étude de Q , et dont on décidera ou non d'entamer ou de poursuivre l'étude.

2) La deuxième dialectique est celle *du parachutiste et du truffier* : contre le double habitus scolaire de la rareté documentaire et de la recherche de l'adéquation immédiate du document au projet d'étude et de recherche, elle conduit à « ratisser » de *vastes zones*, où l'on sait *a priori* qu'on ne trouvera pas grand-chose, mais où pourra advenir *de l'inattendu*, et où l'on apprendra à repérer les rares « pépites », souvent peu visibles, qui feront progresser la recherche.

3) La troisième dialectique est celle *des boîtes noires et des boîtes claires* : contre le primat donné à la connaissance *déjà* disponible, elle invite à donner le primat à la connaissance *pertinente*, quel que soit *a priori* son statut au regard des savoirs enseignés, à limiter au nécessaire la clarification (les boîtes réputées « claires » sont *toujours* des boîtes *grises*), à prendre donc le risque, ponctuellement,
– de clarifier des boîtes noires situées à la limite du curriculum officiel,
– de laisser dans l'obscurité ce que, dans le curriculum familial, l'on vise par ailleurs à clarifier,
– de traquer les boîtes « invisibles » parce que « transparentes », pour *déconstruire les évidences* de la culture de l'institution *chaque fois que c'est utile*.

4) La quatrième dialectique est celle qu'on peut appeler, classiquement, *de la conjecture et de la preuve*, mais qu'on nommera, dans une perspective plus large, *des médias et des milieux*²⁰ : contre la mise à l'épreuve plus ou moins réglée à l'avance d'assertions réputées sûres en vertu surtout de l'autorité de l'institution, elle engage à soumettre les assertions obtenues à la critique des diverses dialectiques et à évaluer le « *degré d'incertitude* » d'une assertion donnée.

5) La cinquième dialectique est celle *de la lecture (= de « l'excription ») et de l'écriture (= de l'inscription)* : contre le recopiage formel de textes où ont été inscrites des réponses R^\diamond que la mise en texte a « dévitalisées », elle convie à entrer dans la dialectique de la lecture « excriptrice », qui redonne vie aux réponses R^\diamond déposées dans les documents disponibles, et de l'écriture « inscriptrice » d'une réponse propre R^\heartsuit qui prend forme peu à peu *par le croisement de plusieurs niveaux d'écrit* (carnet de bord, notes de synthèse, glossaire, production finale).

6) La sixième dialectique est celle *de la diffusion et de la réception* : contre la tentation de ne pas défendre sa réponse R , supposée par avance connue et reconnue par l'institution où elle est produite, contre

¹⁸ On parlera en ce cas de *synergies codisciplinaires* : « synergie » vient du grec *sunergein*, « travailler ensemble », mot formé lui-même de *sun* « ensemble, avec » et de *energein* « agir » (qui a donné *énergie*).

¹⁹ « Dans les sciences humaines », précise le *Dictionnaire historique de la langue française*, le substantif *dialectique* « recouvre toute méthode d'investigation qui repose sur le principe d'antinomie et de dépassement de l'antinomie. » La maîtrise conceptuelle et technique de ces dialectiques, par l'« étudiant » comme par le « directeur d'étude », ne saurait bien sûr être assurée par la présentation concise qu'on en fait ici : celle-ci constitue toutefois un point d'appui indispensable au travail de formation utile.

²⁰ Sur les notions de *média* et de *milieu*, voir la notice *Éducation mathématique & citoyenneté*.

l'opportunité à l'endroit de R afin de complaire à qui l'on s'adresse, elle invite à *défendre* R sans infidélité au travail accompli, mais dans l'attention à ce qu'autrui en peut recevoir.

7.4. La discipline intellectuelle que concrétisent les dialectiques précédentes s'articule, *dans une mesure variable*, avec la discipline *spécifique des œuvres* – mathématiques, métrologiques, historiques, etc. – sollicitées pour apporter des matériaux et des outils à la construction de R^\vee . L'utilisation de telle connaissance empruntée à une certaine discipline ne fait pas pour autant rencontrer à l'emprunteur *la discipline* du champ de connaissances sollicité. Le fait par exemple d'emprunter à l'histoire des mathématiques l'information selon laquelle Hamilton précisait, dans une lettre écrite peu de temps avant sa mort survenue en 1865, que sa découverte des quaternions avait franchi une étape décisive le lundi 16 octobre 1843 ne revient pas à se soumettre à la discipline historique, c'est-à-dire à pratiquer l'histoire (non plus d'ailleurs que la mathématique des quaternions). De même, utiliser le fait que le volume du mazout correspondant à une hauteur de mazout h (mesurée en centimètres, avec $0 \leq h \leq 60$) dans une cuve cylindrique de 3 m de long et de 1,20 m de diamètre est donné par la formule

$$v = 1080 \left[\arccos \left(1 - \frac{h}{60} \right) - \left(1 - \frac{h}{60} \right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{h}{60} \right)^2} \right]$$

ne conduit à se soumettre à la discipline mathématique que de manière très « périphérique ». Par contraste, ce sera déjà se soumettre à une discipline mathématique, certes rudimentaire, mais bien réelle, que de tirer de là le volume correspondant à une hauteur de mazout comprise entre 60 et 120 cm.

7.5. Dans quelle mesure convient-il d'entrer dans la discipline de telle ou telle œuvre mobilisée pour élaborer une réponse R^\vee ? C'est désigner là un problème didactique majeur, celui de la transmutation des disciplines de connaissance en disciplines *d'étude et de recherche*. On notera simplement, à cet égard, la tension entre deux pôles : d'une part, le pôle de la *soumission formelle aux disciplines*, pour l'amour de la ou des disciplines mobilisées (parfois indûment), qui fait de l'étude de Q la pure occasion d'une rencontre nouvelle ou renouvelée avec telle ou telle discipline de connaissance ; d'autre part, le pôle de la *consommation anarchique* de connaissances par simple recopiage « périphérique », qui dispense d'entrer dans les disciplines. Le premier pôle est celui du danger *occasionnaliste*, qui pèse lourdement sur la nouvelle épistémologie scolaire que les IDD et TPE devraient propager ; le second pôle est celui du danger *opportuniste* encouru par la nouvelle épistémologie scolaire. Les deux tendances – opportuniste et occasionnaliste – peuvent, au reste, nouer une alliance contre nature dans la promiscuité des pratiques didactiques scolaires.

7.6. D'une manière générale, toute activité humaine naissante va, à plus ou moins longue échéance, se stabiliser dans une forme réglée, *disciplinée*. Ainsi sont nées toutes les disciplines établies. Ainsi évoluent-elles aussi : l'étude de toute question inédite Q va, en principe, créer « de la discipline », à partir de matériaux empruntés à des disciplines déjà constituées. Cet accent mis sur la discipline comme *moyen* de l'action humaine efficace et partageable – parce qu'à la fois « lisible » et impartiale – vaut dans tous les contextes de la vie sociale. À cet égard, on notera – la chose mérite d'être soulignée – que le verbe « discipliner » (ou plutôt le latin chrétien *disciplinare*) a signifié d'abord « former », « instruire dans une doctrine », « enseigner une méthode », le mot « discipline » ne désignant que *par extension* la discipline au sens courant du terme, c'est-à-dire les règles de convivialité au sein d'une institution. Inversement, étudier une discipline (au sens scolaire du terme : étudier le français, le latin, les mathématiques, la philosophie, l'histoire, etc.), ce n'est jamais, en ce sens, qu'apprendre à se soumettre – et à conformer ses gestes – à *la discipline propre à l'œuvre étudiée*. Il y a ainsi continuité, et même compénétration, entre *les* disciplines scolaires de formation et *la* discipline qui doit régner dans l'institution scolaire : dans une très large mesure, les deux types de disciplines sont en fait indissociables. L'ardente obligation de *créer de la discipline* doit prévaloir d'un même mouvement dans les *travaux* de la classe comme dans l'*ordinaire de la vie* en classe et dans l'établissement.

8. Discipline de formation, discipline professionnelle

8.1. L'ensemble des analyses précédentes se transpose entièrement au cas du professionnel de l'enseignement des mathématiques : constamment, celui-ci est confronté à des *questions*

d'enseignement Q auxquelles il devra apporter, bon gré mal gré, une (esquisse de) *réponse* R , et cela en *observant* les réponses R° existantes, en les *analysant*, en les *évaluant*, en vue de *développer* la réponse R^\vee souhaitée, dont il assurera alors la *mise en œuvre* et (donc) la « *publication* ».

8.2. De manière générale, tout professionnel qui n'est pas un pur exécutant est *confronté régulièrement* à l'exigence de développer, seul ou au sein d'un *collectif* de travail, des produits satisfaisant des *spécifications* choisies, notamment, pour affronter les *conditions d'emploi* qui lui sont imposées. S'agissant du professeur, l'exigence est celle de « développer » des *produits didactiques*, telle une activité d'étude et de recherche (AER), satisfaisant des contraintes données. Semblable exigence se présente au professeur de manière récurrente au cours d'une année scolaire, relativement à une classe donnée : c'est en vérité *chaque semaine* que, « préparant son cours », il doit aussi se livrer à des tâches de *microdéveloppement*.

8.3. Le métier qu'il exerce pose notamment à tout professeur une foule de questions Q_T du type « Comment accomplir les tâches du type T ? », où T est un certain type de tâches – « didactiques » ou non. Un professeur débutant devrait idéalement pouvoir répondre *à toutes ces questions Q_T à la fois*²¹. De fait, sauf à différer l'accomplissement des tâches du type T , il doit, *volens nolens*, apporter *de fait* des réponses « personnelles » \mathfrak{R}_T , réponses de première prise que, étudiant à nouveaux frais les questions Q_T , l'élève professeur devra accepter de *déconstruire* – en assumant, donc, de devoir y renoncer – pour les *reconstruire* solidairement à l'aide notamment des matériaux apportés par la formation à travers ses différents dispositifs.

8.4. Une réponse R est une réalité *qui se construit* et dont la construction, dans nombre de cas, demande *un temps considérable*, contrairement à ce que peut laisser croire l'épistémologie scolaire traditionnelle où la plupart des questions soulevées reçoivent réponse dans les minutes qui suivent²². Il convient donc qu'un professeur apprenne à vivre avec un grand nombre de *questions ouvertes* et de réponses *partielles, insuffisantes*, qu'il lui faudra *critiquer et déconstruire* même lorsqu'il aura fini par s'y habituer – ce qui est sans doute le plus difficile mais *le plus essentiel*. Cette *discipline de formation*, qui s'impose en vérité à chacun, débutant ou chevronné, suppose notamment de se frotter, de manière plus ou moins approfondie, à une multiplicité de disciplines de connaissance. La liste de ces disciplines, avec lesquelles le professionnel doit nouer un commerce approprié sous le contrôle de la didactique²³, est *a priori* ouverte : elle comporte certainement de l'histoire, du droit, de la psychologie sociale, de la sociologie, etc. Pour le professeur de mathématiques, bien sûr, l'une des ressources essentielles se trouvent, à côté des disciplines auxquelles sa discipline est scolairement affine (physique et chimie, biologie, technologie, etc.), dans les *mathématiques* elles-mêmes, lesquelles apportent régulièrement au professeur, par certains de leurs développements, une intelligibilité propre et des ressources spécifiques quant à l'enseignement des thèmes mathématiques dont l'étude est prescrite par le programme de la classe. En ce sens, le professeur de mathématiques n'a jamais fini d'étudier des mathématiques – même si, en trop de cas, il doit *commencer* à étudier des disciplines dont il croyait naïvement pouvoir faire l'économie !

8.5. La *discipline professionnelle* intègre ainsi l'exigence de se soumettre de façon continuée à une *discipline de formation* rigoureuse. Cette discipline gagne à aller au-delà des pratiques de microdéveloppement déjà mentionnées : *chaque année*, le bon professionnel doit, pour améliorer significativement la qualité de son enseignement, se mesurer à un petit nombre d'objectifs de *minidéveloppement* – même s'il s'engage par ailleurs, en général *en équipe*, dans un travail de *macrodéveloppement*. Au lieu donc de consacrer *quelques heures* à un tel travail, ainsi qu'il en va usuellement en matière de microdéveloppement, il mobilisera alors *quelques dizaines d'heures* à la résolution d'un problème d'*ingénierie didactique* sur lequel il souhaite progresser. C'est notamment dans ce registre du minidéveloppement que se situe le travail présenté dans le *mémoire professionnel*

²¹ Dans le séminaire de didactique des mathématiques, la rubrique des « questions de la semaine » assume la fonction – sur laquelle on ne saurait trop insister – d'aider à faire émerger, chez les participants au séminaire, des questions ayant leur origine dans les difficultés de leur pratique enseignante effective ou de leur pensée de cette pratique, premier geste sans lequel on ne peut espérer engager le travail de déconstruction / reconstruction requis par la formation visée.

²² Il n'en va pas ainsi, bien entendu, s'agissant des IDD et TPE, typiques de la nouvelle épistémologie scolaire : le temps d'un IDD ne doit pas être inférieur à 12 ou 13 semaines ; celui dévolu au TPE est d'environ 15 semaines.

²³ La didactique est la science de la diffusion – scolaire et non scolaire – des connaissances et savoirs.

réalisé au cours de la deuxième année d'IUFM : ce travail relève donc d'un type de tâches ***qui s'intègre normalement, chaque année, au travail du professeur***. D'une manière globale, le travail d'étude et de recherche à réaliser est ainsi un ***geste professionnel*** appelé à être ***reproduit année après année*** – et non un geste « terminal » qu'on accomplirait une fois et une seule dans sa vie professionnelle.