

ÉTUDIER LA GÉOMÉTRIE AVEC UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

par Yves Chevallard

I. Se former aux TICE

I.1. Le « C2i2e »

☞ La formation des enseignants en matière de TICE est entrée aujourd'hui dans un temps où une exigence décisive s'impose : celle d'une plus grande uniformité et d'un partage plus égalitaire de l'expertise en la matière. L'époque des « fous » d'informatique émergeant au-dessus d'une masse indifférente, velléitaire, timorée ou sobrement mesurée dans ses ambitions est, à bien des égards, dépassée. Ce qui importe désormais – tel est le régime épistémologique normal en toute profession qui s'assume comme telle –, c'est qu'une maîtrise adéquate, commune, bien partagée de l'emploi des TIC pour et dans l'enseignement prenne sans hâte, mais sûrement, le dessus sur les « exploits » hauts en couleur portés par quelques rares épopées individuelles dans le domaine ! Ce qui convient en effet à un corps de métier, c'est que ses membres disposent chacun, en chaque domaine de connaissance et d'action pertinent pour l'exercice du métier, pour l'essentiel des mêmes connaissances, que, donc, ils sachent (faire) les mêmes choses, et, en outre, la chose est essentielle, qu'ils sachent qu'ils savent les mêmes choses – condition *sine qua non* pour progresser ensemble¹, c'est-à-dire pour accroître à terme la *qualification* du métier. Le niveau moyen et son élévation importent plus que le niveau des 5 % les plus habiles !

☞ L'homogénéité des connaissances des professeurs de mathématiques est assurée, en ce qui concerne les mathématiques elles-mêmes, par les cursus de formation qu'ils ont suivis. Une très grande partie de la culture mathématique des professeurs est ainsi largement partagée au sein de la profession : chacun sait par exemple étudier une fonction simple et – chose non moins cruciale – chacun sait que chacun le sait. Chacun a su inverser une matrice simple et chacun sait que chacun a su le faire. En matière de TICE, un processus de cette sorte n'existe pas, pour cette raison déjà que le stock de connaissances partagées et ces connaissances mêmes restent largement **à construire** ! Le processus de convergence vers une culture commune – qui n'exclura jamais, bien sûr, les passions et les aventures personnelles – est désormais impulsé, modestement sans doute, par un quasi-cursus de formation que scande, à l'école, au collège – et demain au lycée – le B2i (« brevet informatique et internet », dont le niveau 2 se passe en 3^e : voir <http://eduscol.education.fr/index.php?/D0053/accueil.htm>), puis le C2i (« certificat informatique et internet »), dont le niveau 1 se passe (ou devrait se passer) à l'université (voir <http://tice.education.fr/EducNet/Public/formation/c2i-etud>).

☞ Un C2i de niveau 2 destiné spécifiquement aux enseignants est actuellement en cours d'élaboration, selon les termes fixés par une circulaire parue dans le BO n° 11 du 11 mars 2004 et reproduite ci-après (<http://www.education.gouv.fr/bo/2004/11/MENT0400410C.htm>).

¹ Dans un groupe de personnes suivant une « même » formation mais qui, pour autant, ne se savent pas partager approximativement un même niveau de connaissance en un certain domaine, chacun est porté à s'interdire de soulever des questions relatives à ce domaine par crainte de révéler sa propre ignorance – la réponse à la question posée pourrait être connue de tous ! – ou, à l'inverse, par souci de ne pas importuner une majorité de personnes du groupe au cas où la question formulée renverrait à un niveau de connaissance très supérieur à celui de la plupart des membres du groupe.

IUFM

Certificat informatique et internet (C2i®) niveau 2 « enseignant »

Circulaire n° 2004-46 du 2 mars 2004 / BO n° 11 du 11 mars 2004

Certificat informatique et internet (C2i®) niveau 2 « enseignant »

Enseigner dans la société de l'information

La rapide évolution des technologies de l'information et de la communication (TIC) a engendré au cours de ces dernières années une progression notable des équipements disponibles dans les établissements d'enseignement. Les instructions officielles et les nouveaux programmes prennent en compte cette évolution. Tout enseignant est désormais concerné par l'usage des outils propres à ces technologies et leur intégration dans les pratiques pédagogiques.

Il a été engagé un effort particulier pour favoriser la maîtrise de ces nouveaux outils de production, de transformation et de diffusion de l'information par l'ensemble de la société. L'éducation nationale contribue naturellement à ce projet d'une société de l'information pour tous qui nécessite un effort éducatif ambitieux. Son rôle est de dispenser à chaque citoyen la formation qui, à terme, le mettra à même d'utiliser de manière raisonnée les technologies de l'information et de la communication, de percevoir les possibilités et les limites des traitements informatisés, de faire preuve d'esprit critique face aux résultats de ces traitements et d'identifier les contraintes juridiques et sociales dans lesquelles s'inscrivent ces utilisations. Cela se traduit pour le moment dans l'enseignement scolaire par les différents niveaux du brevet informatique et internet (B2i®) et, dans l'enseignement supérieur, par le certificat informatique et internet niveau 1 (C2i®).

Les universités et les instituts universitaires de formation des maîtres se sont déjà engagés dans la mise en œuvre du C2i® niveau 1 qui décrit les compétences désormais indispensables à la poursuite d'études supérieures. La mise en place du C2i® niveau 2 a comme objectif de poursuivre cet effort et concernera à terme les différentes filières professionnelles de l'enseignement supérieur.

Les compétences professionnelles spécifiques à l'exercice du métier d'enseignant, dans le nouveau contexte pédagogique et éducatif, seront identifiées dans le C2i® niveau 2 «enseignant». Elles devront permettre à tout enseignant d'évoluer et de continuer à se former tout au long de sa carrière.

Le certificat informatique et internet (C2i ®) niveau 2 « enseignant »

La présente circulaire a pour objet d'engager, pour le métier d'enseignant, la mise en place du niveau 2 du C2i® annoncé par la circulaire n° 2002-106 du 30 avril 2002 et d'en identifier les principaux domaines de compétences. Elle fixe également les principes généraux de sa mise en œuvre et de sa validation.

Le niveau 2 suppose la maîtrise des compétences définies par le C2i® niveau 1.

Ce niveau 2 vise à attester des compétences professionnelles communes et nécessaires à tous les enseignants pour l'exercice de leur métier dans ses dimensions pédagogique, éducative et citoyenne.

Cet ensemble de compétences se déclinera dans les domaines suivants, à la fois pour des utilisations individuelles et pour des usages à mettre en œuvre avec les élèves ou les étudiants :

- les problématiques et les enjeux liés aux TIC en général et dans l'éducation en particulier ;
- les gestes pédagogiques liés aux TIC ;
- la recherche et l'utilisation de ressources ;
- le travail en équipe et en réseau ;
- les espaces numériques de travail ;
- l'évaluation et la validation des compétences TIC dans le cadre des référentiels inscrits dans les programmes d'enseignement.

Mise en œuvre du C2i ® niveau 2

Le constat de la maîtrise des compétences se fera à travers une validation dont les modalités seront choisies par les instituts universitaires de formation des maîtres, dans le respect d'un cahier des charges qui sera

publié prochainement au BO. L'adhésion à ce cahier des charges vaudra autorisation à valider ce certificat informatique et internet (C2i®) niveau 2 «enseignant». Les modalités d'acquisition des compétences du C2i® niveau 2 «enseignant» par les enseignants-stagiaires sont laissées à l'initiative des instituts universitaires de formation des maîtres et feront partie intégrante des plans de formation soumis à expertise dans le cadre de la procédure contractuelle.

Le C2i® niveau 2 «enseignant» sera mis en place à partir de la rentrée universitaire 2005, selon les modalités indiquées dans le cahier des charges, après une phase expérimentale durant l'année universitaire 2004-2005 dans les IUFM qui se porteront volontaires. Un groupe d'experts est chargé de définir les compétences détaillées composant ce niveau 2. Un groupe de travail est chargé de la rédaction du cahier des charges qui sera validé par un groupe de pilotage.

Pour le ministre de la jeunesse,
de l'éducation nationale et de la recherche
et par délégation,
Le directeur du Cabinet
Alain BOISSINOT

I.2 Un référentiel de compétences

☞ Le « C2i2e » (voir <http://tice.education.fr/EducNet/Public/formation/c2i-ens>) se construit autour d'un « référentiel de compétences » qui en décline les parties et sous-parties. Le référentiel actuellement disponible distingue divers *domaines de compétence* et, à l'intérieur de chacun d'eux, des *savoirs et savoir-faire*. Le tableau reproduit ci-après présente d'abord des « *Compétences générales liées à l'exercice du métier* » (A.I à A.III), puis des « *Compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans sa pratique* » (B.I à B.VII). C'est ainsi par exemple que le domaine de compétence B.VII s'intitule « Compétences d'évaluation », l'une de ces compétences étant, par exemple, celle « d'exploiter les résultats produits par des logiciels institutionnels d'évaluation des élèves ».

☞ L'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille fait partie des 23 IUFM qui se sont portés volontaires pour participer à l'élaboration du C2i2e. Au sein de ces IUFM, diverses filières y ont participé, dont, pour l'académie d'Aix-Marseille, la filière « Mathématiques » (qui forme les professeurs des lycées et collèges). En son sein comme dans les autres filières engagées dans le travail d'élaboration, les professeurs stagiaires ont eu, pour chacune des « compétences » évoquées, à préciser (subjectivement) leur situation personnelle sur une échelle comportant les mentions « Inconnu », « Abordé », « Pratiqué », « Maîtrisé ».

I.3. Le référentiel de compétences envisagé

☞ On reproduit ci-après le référentiel de compétences actuellement envisagé.

A – Compétences générales liées à l'exercice du métier	
Domaines de compétence	Savoirs – Savoir faire
A.I Maîtrise de l'environnement numérique professionnel	1 - Identifier les personnes ressources TIC et leurs rôles respectifs, dans l'école ou l'établissement, et en dehors (circonscription, bassin, Académie, niveau national...).
	2 - S'approprier différentes composantes informatiques (lieux, outils...) de son environnement professionnel.
	3 - Choisir et utiliser les ressources* et services d'un environnement numérique de travail* (ENT).

	4 - Choisir et utiliser les outils les plus adaptés pour communiquer avec les acteurs et usagers du système éducatif.
	5 - Se constituer et organiser des ressources en utilisant des sources professionnelles*.
A.II Développement des compétences pour la formation tout au long de la vie	1 - Utiliser les ressources en ligne et les dispositifs de Formation Ouverte et à Distance (FOAD)* pour sa formation.
	2 - Se référer à des travaux de recherche liant didactique et TICE.
	3 - Pratiquer une veille pédagogique et institutionnelle, notamment par l'identification des réseaux d'échanges concernant son domaine, sa discipline, son niveau d'enseignement.
A.III Responsabilité professionnelle dans le cadre du système éducatif	1 - Adapter son mode d'expression et de communication aux différents espaces de diffusion (institutionnel, public, privé, interne, externe...).
	2 - Prendre en compte les enjeux et respecter les règles concernant : la sécurité informatique, la recherche et les critères de contrôle de validité des informations, le filtrage Internet*
	3 - Prendre en compte les lois et les exigences d'une utilisation professionnelle et citoyenne des TICE concernant : la protection des mineurs, la protection des libertés individuelles et de la sécurité des personnes, la confidentialité des données, la propriété intellectuelle, le droit à l'image
	4 - Respecter et faire respecter la charte d'usage de l'établissement, dans une perspective éducative d'apprentissage de la citoyenneté.
B - Compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans sa pratique	
Domaines de compétence	Savoirs – Savoir faire
B.IV Travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif	1 - Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique.
	2 - Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d'équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives.
	3 - Concevoir des situations ouvertes de recherche d'information dans le cadre des projets transversaux et interdisciplinaires.

B.V Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage	1 - Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE.
	2 - Concevoir des situations d'apprentissage mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de classe.
	3 - Rechercher et intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation.
	4 - Préparer des ressources adaptées à la diversité des publics et des situations pédagogiques en respectant les règles de la communication*.
	5 - Concevoir des situations de communication et de travail à l'aide des ENT.
B.VI Mise en œuvre pédagogique en présentiel et à distance	1 - Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC : – travail collectif, individualisé, en petits groupes ; – recherche documentaire.
	2 - Gérer l'alternance entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours.
	3 - Prendre en compte la diversité des élèves, la difficulté scolaire en utilisant les TICE pour gérer des temps de travail différenciés
	4 - Utiliser les TICE pour accompagner des élèves, des groupes d'élèves dans leurs projets de production ou de recherche d'information.
	5 - Prendre une décision pédagogique pertinente face à un incident technique.
B.VII Compétences d'évaluation	1 - Identifier les compétences des référentiels TICE (B2i ou C2i) mises en œuvre dans une situation de formation proposée aux élèves, aux étudiants.
	2 - S'intégrer dans une démarche collective d'évaluation des compétences TICE.
	3 - Exploiter les résultats produits par des logiciels institutionnels d'évaluation des élèves*
	4 - Concevoir des démarches d'évaluation et de suivi pédagogique à l'aide de logiciels appropriés

☞ Le stage de formation continue auquel ce texte sert d'introduction peut être grossièrement situé par rapport au référentiel précédent : il concerne pour l'essentiel la formation au travail de « conception et [de] préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage » (B.V). Mais avant d'explorer les « bons usages », en classe de mathématiques, de certains outils logiciels – les *logiciels de géométrie dynamique* –, on s'arrêtera assez longuement sur certains points cruciaux pour l'enseignement de la géométrie.

II. Retour à la géométrie !

II.1. La géométrie, science de l'espace

☞ Le mathématicien Charles Méray (1835-1911) définissait la géométrie comme la science des *faits spatiaux*. D'elle, Albert Einstein (1879-1955) disait encore qu'elle est « la branche la plus ancienne de la physique » (*La géométrie et l'expérience*, 1921). Et le mathématicien et

épistémologue suisse Ferdinand Gonseth (1890-1975), lui faisant écho, regardait la géométrie comme un « authentique chapitre de la physique » (*Philosophie mathématique*, 1939).

☞ C'est d'un tel constat qu'il faut résolument partir : la géométrie est une science *physique*, dont l'objet est l'*espace sensible*. C'est à partir de là que l'on comprendra – et que l'on pourra faire comprendre – ce que font les mathématiciens à propos de géométrie : transformer en une *théorie déductive* (« mathématique ») ce qui est, en premier comme en dernier ressort, un ensemble de connaissances fondées sur l'étude de l'espace sensible. Tel est le point de vue que l'on développera dans ce qui suit : on en verra plus loin la nécessité et la fécondité dans la perspective de l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique pour « faire de la géométrie » en classe de mathématiques.

II.2. La géométrie, science *expérimentale*

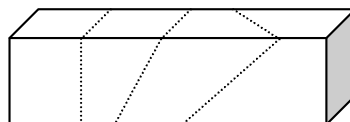
☞ La reconnaissance du caractère génétiquement *expérimental* de la géométrie élémentaire des mathématiciens a été formulée de manière extrêmement lucide vers 1900, en relation notamment avec la belle effervescence autour de la question de l'enseignement secondaire, mouvement qui aboutira à la grande réforme de 1902. C'est ainsi que Charles-Ange Laisant (1841-1920), directeur de la revue *L'Enseignement mathématique*, écrit en 1901 : « Les axiomes expérimentaux grouillent de toutes parts, et c'est par une sorte d'hypocrisie voulue qu'on les dissimule au lieu de les mettre franchement en évidence. » Dans cette même revue paraît en 1905 le compte rendu d'un ouvrage publié par Émile Borel (1871-1956) dans la perspective de la réforme alors en cours ; on y lit notamment ceci : « Voilà longtemps que le danger des abstractions euclidiennes est montré (faut-il rappeler le nom de Méray ?), on sait maintenant que, puisque malgré tout, les vérités géométriques sont d'ordre expérimental, il n'y a pas avantage à dissimuler cette origine [...]. »

☞ Soulignons ce fait : dans une théorie déductive de l'espace, les axiomes doivent énoncer des propriétés de l'espace dont le seul fondement est l'expérimentation. Avant et afin d'organiser déductivement les propriétés de l'espace, il convient d'abord de les étudier expérimentalement, jusqu'à un certain point, pour les découvrir, ou les vérifier, bref, pour s'assurer de leur *vérité*.

II.3. Comment expérimenter sur l'espace ?

☞ Le problème de l'expérimentation visant à établir un fait spatial a largement disparu de la classe de mathématiques d'aujourd'hui. Il convient donc d'y revenir, d'y réfléchir, de lui apporter des éléments de solution.

☞ On scie un barreau en forme de parallélépipède rectangle (voir ci-après). Quelle est la nature de la section ?



☞ On peut évidemment se livrer à un « pronostic », par exemple le suivant :

1. lorsque le plan de la scie est orthogonal à l'une des arêtes du barreau, la section devrait être un *rectangle* ;

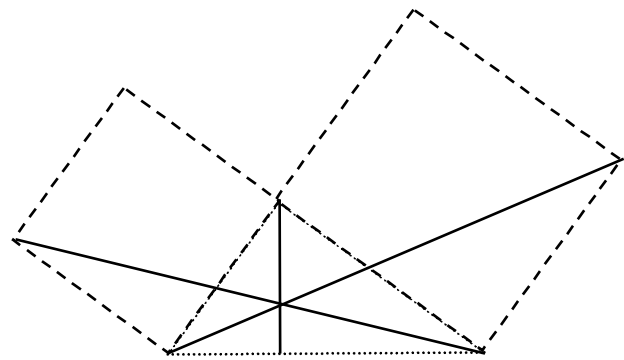
2. lorsque le plan de la scie est parallèle à une arête du barreau, mais n'est orthogonal à aucune des arêtes, la section devrait être un *parallélogramme* (non rectangle) ;
3. lorsque le plan de la scie n'est parallèle à aucune des arêtes du barreau, la section devrait être un quadrilatère *quelconque* (non parallélogramme).

☞ Pour soumettre à l'expérience cette « conjecture », on peut se procurer un barreau de bois à peu près conforme, et le scier effectivement de différentes façons, avant de déterminer (par des mesurages, par exemple) la nature de la section.

☞ Bien entendu, on rencontre là tous les problèmes des sciences expérimentales. Il faut d'abord imaginer une expérience réalisable, fiable, concluante, ce qui ne va pas toujours de soi. Et surtout, on est confronté alors au problème classique de l'*induction* : même si l'on peut répéter l'expérience avec succès un très grand nombre de fois, on ne pourra pas éviter un *coup de force assertif* lorsqu'on prétendra passer des cas particuliers réellement observés au cas général en disant par exemple : « La section d'un parallélépipède rectangle et d'un plan est un rectangle quand le plan est orthogonal à l'un des côtés du parallélépipède rectangle. »

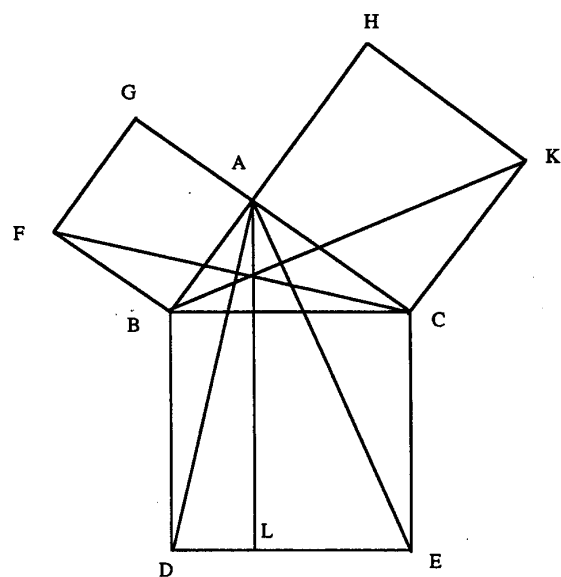
☞ Traditionnellement, l'expérimentation sur l'espace est, du moins pour les faits spatiaux « plans », une expérimentation *graphique*.

☞ On considère un triangle rectangle, les carrés construits sur les côtés de l'angle droit, la hauteur relative à l'hypoténuse, et les deux droites (autres que celles déjà considérées) passant par les extrémités de l'hypoténuse et un sommet du carré construit sur le côté opposé. Il semble que ces trois droites concourent. En est-il bien ainsi ?



☞ L'expérience, ici, consisterait à tracer une version la plus rigoureuse possible du *schéma* précédent – à tracer, donc, une *épure*.

☞ Si l'on n'est pas suffisamment habile pour parvenir à une épure tout à fait concluante, ou si l'on ne dispose pas d'un matériel de tracé suffisamment sophistiqué, on peut tenter d'utiliser des épures toutes faites. Il se trouve en effet que la figure précédente apparaît dans les *Éléments d'Euclide* – à l'occasion de la démonstration euclidienne du théorème de Pythagore. On peut donc penser observer l'épure qui ne manquera pas de figurer dans une édition moderne des *Éléments*. Dans celle due à Bernard Vitrac et Maurice Caveing (PUF, Paris, 1990), on trouve ainsi (à la p. 283) la figure ci-après. Cette figure, on le voit, n'est pas complètement probante – même si elle ne permet pas de



rejeter la conjecture à tester. L'expérience, ici, ne fait pas parler la nature de façon claire !

☞ L'étude expérimentale de l'espace a été très largement oubliée dans l'enseignement secondaire de la géométrie. Il s'agit aujourd'hui de lui redonner une place claire, fondée tant du point de vue épistémologique que du point de vue didactique, à l'instar de quelques-uns des meilleurs mathématiciens. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que ses pairs nommaient non sans raison le *prince des mathématiciens*, fit ainsi vérifier expérimentalement la conjecture selon laquelle la somme des angles d'un triangle de l'espace vaut 180° : l'expérience porta sur les angles d'un triangle formé par trois pics distants de 69, 85 et 107 km : la somme dépassait 180° de près de $15''$, ce qui, étant donné la précision des mesures, était malheureusement insuffisant pour conclure...

II.4. L'expérience en géométrie

☞ L'expérience tentée par Gauss était cruciale pour la raison suivante : la vérité dans l'espace sensible de la conjecture de la somme des angles *équivaut* au fait que cet espace est *euclidien* : il y a [existence et] *unicité* de la parallèle à une droite donnée par un point donné (« postulat d'Euclide »). Or si l'espace est euclidien, une propriété essentielle y est vraie, qu'on peut appeler *propriété de Wallis-Laplace*.

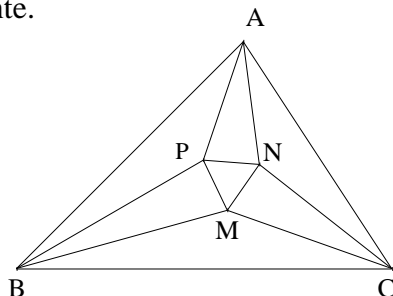
☞ C'est dans un exposé « lu publiquement à Oxford le soir du 11 juillet 1663 » que le mathématicien anglais John Wallis (1616-1703) a, semble-t-il pour la première fois, attiré l'attention sur une propriété qui, dans la tradition géométrique, était tenue pour aller de soi : le fait que « pour une figure quelconque, il y en a toujours une autre, de grandeur quelconque, qui lui est semblable », ou, pour le dire autrement, que « toute figure peut être rapetissée ou agrandie de manière illimitée ». Cette propriété d'invariance, démontre-t-il, est une conséquence du postulat d'Euclide. En fait, cette propriété *équivaut* au postulat d'Euclide.

☞ En d'autres termes, si l'espace est euclidien, les faits spatiaux sont *invariants par similitude*, c'est-à-dire ne dépendent pas de la *taille* des figures, et ce fait *caractérise* la géométrie que l'on nomme aujourd'hui euclidienne (en l'opposant ainsi aux géométries *non* euclidiennes, à la géométrie hyperbolique notamment). Dans son *Programme d'Erlangen* (1872), Felix Klein (1849-1925) redéfinira cette géométrie comme l'étude des *propriétés invariantes par le groupe des similitudes de l'espace*.

☞ Le fait que l'espace sensible vérifie la propriété de Wallis-Laplace a des conséquences décisives pour toutes sortes de pratiques sociales : si, par exemple, l'espace ambiant était hyperbolique, la notion de *plan* d'une ville ou d'un bâtiment n'aurait guère de sens – le plan d'un objet devant alors, pour être rigoureux, être *de la même taille* que l'objet lui-même ! La propriété de Wallis-Laplace implique que l'espace « tout entier » ne contient *rien de plus ni rien de moins* que ce que peut contenir cette minuscule parcelle d'espace qu'est la feuille de papier où le géomètre trace des figures pour les étudier. Dès lors, le *laboratoire du géomètre euclidien* – et de tous ceux qui parviennent à « géométriser » leur objet d'étude – se réduit à une feuille de papier, en même temps que toute expérience relative aux faits de l'espace peut devenir, du moins s'agissant de géométrie *plane*, expérience *graphique*. Il y a là, on doit le souligner, un fait des plus singuliers : on voit mal, par exemple, un océanographe étudier *tout l'océan* en se limitant à l'étude d'une pièce d'eau de quelques mètres carrés au bord du rivage ! Or c'est bien cela pourtant que fait le géomètre euclidien, qui semble en conséquence se désintéresser de l'espace ambiant, pour ne plus guère s'intéresser qu'à son laboratoire miniature.

☞ Pouvoir tout tester sur une feuille de papier est, bien sûr, un immense avantage ! Mais, en réalité, rien n'est simple. Aujourd'hui encore, dans la classe de mathématiques, on ne dispose pas des instruments adéquats pour réaliser efficacement les expériences graphiques utiles.

☞ Considérons la figure suivante.



Les droites (AP) et (AN) sont les *trisectrices* de \widehat{BAC} , (BM) et (BP) celles de \widehat{CBA} et, de même, (CN) et (CM) celles de \widehat{BCA} . Le triangle MNP a, sur cette figure, tout l'air d'être *équilatéral*. L'est-il vraiment ?

☞ Quand on souhaite, sur ce point, procéder à une expérience graphique avec les instruments de tracé usuels, les choses ne sont pas simples. Paradoxalement, on fera ici un premier usage d'un logiciel de géométrie dynamique – il s'agit de GeoplanW – pour *simuler* un tracé *imprécis*.

☞ Il faut commencer par se livrer à une tâche d'un type inhabituel aujourd'hui dans la classe de mathématiques : *concevoir* une expérience graphique visant à tester la conjecture d'équilatéralité indiquée. Pour cela, il suffit (par exemple) de choisir deux nombres ($\in \mathbb{N}^*$) α et β tels que $\alpha + \beta < 60$. Des points B et C ayant été choisis, le point A s'obtient alors comme solution des égalités $\widehat{CBA} = 3\alpha^\circ$, $\widehat{BCA} = 3\beta^\circ$. On a bien entendu

$$\widehat{BAC} = 3\gamma^\circ, \text{ où } \gamma = 60 - (\alpha + \beta).$$

Les trisectrices s'obtiennent de manière évidente.

☞ Cela noté, supposons que l'« opérateur » – l'élève de 2^{de} par exemple –, commette quelques erreurs. Dans la figure ci-dessus, on a $\alpha = 15$ et $\beta = 19$ (et donc $\gamma = 26$). Si toutefois, l'imprécision du tracé fait que

$$\widehat{BCM} = 18,5^\circ, \widehat{BAP} = 26,5^\circ, \widehat{CAN} = 26,5^\circ$$

et en supposant qu'il n'y a aucune autre erreur, on obtient l'épure ci-dessous à gauche.



Ici, l'évidence graphique se dérobe ! Si l'on prend $\widehat{CBM} = 15,5^\circ$, on obtient la figure ci-dessus à droite, plus éloignée encore d'un triangle équilatéral...

☞ Il s'agit là d'un phénomène qui traverse et travaille *toute* la géométrie plane comme pratique scientifique. L'exemple du cercle circonscrit à un triangle, que l'on présente ci-après, est à cet égard révélateur.

☞ Soit à établir expérimentalement que, dans un triangle ABC, le fait spatial suivant a lieu : **les médiatrices des trois côtés sont concourantes**. Supposons, plus précisément, que l'on veuille établir ce fait spatial en établissant que le point d'intersection de deux des trois médiatrices est en fait équidistant des trois sommets A, B, C.

☞ On choisit de procéder ainsi : désignant par O le point commun aux médiatrices de [BC] et [CA], on se propose de vérifier que le cercle de centre O passant par C passe aussi par A et B. L'expérience **graphique** à réaliser peut être représentée par le **schéma** suivant, dont la précision importe peu **pourvu qu'elle n'entraîne pas d'ambiguïté de lecture** (le schéma d'une expérience graphique gagne d'ailleurs à être tracé « à main levée ») :

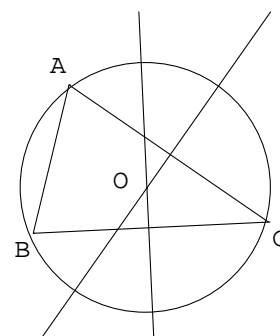
Classe de 5^e4 – Expérience graphique 17



Les médiatrices de [BC] et [CA] se coupent en O. Le cercle de centre O passant par C passe-t-il par B et A ?

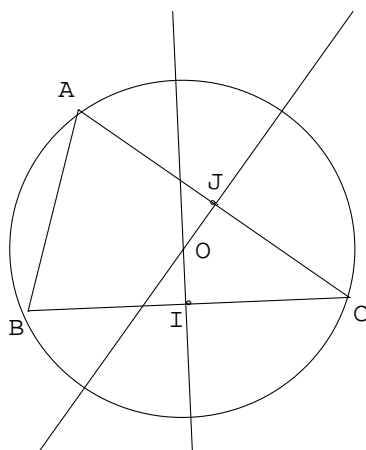
☞ La **réalisation** de l'expérience graphique, qui revient au tracé d'une **épure**, révèle pourtant des difficultés : en général, le cercle **ne passe pas « exactement »** par B et C, comme le montre la figure ci-contre.

☞ La raison d'un tel phénomène se trouve évidemment **dans l'imprécision du tracé** : les **milieux** de [BC] et [CA] ne sont pas exactement **au milieu** ! Les médiatrices, même si elles passent par les milieux des côtés, ne sont pas **exactement** perpendiculaires aux côtés ! Le cercle de centre O passant par C ne passe pas exactement par C et n'est peut-être pas exactement de centre O !



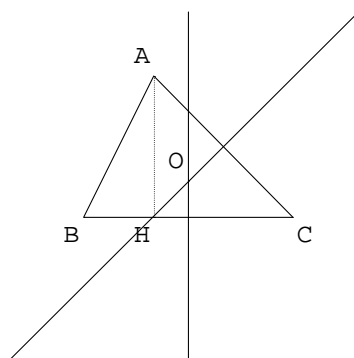
☞ Avant d'imputer ces faits à la maladresse ou au manque de soin des élèves, il convient de voir que, à moins que **l'on ne triche**, il s'agit là d'un **phénomène quasi inévitable**, même si, bien entendu, son ampleur peut être plus ou moins réduite.

☞ La figure précédente a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique en introduisant (volontairement) de très légères erreurs (les médiatrices ne passent pas exactement par les milieux I et J) . C'est ce que montre plus nettement la figure ci-contre.



☛ Ce phénomène peut être précisé par le calcul. La petite étude mathématique qui suit, ainsi que ses multiples variantes possibles, qui ont le mérite de partir d'un *vrai* problème – comment expliquer *objectivement* l'à-peu-près des tracés géométriques ? – pourront utilement être menées à bien *en classe de 2^{de}*.

☛ Considérons donc le cas particulier de la figure suivante, où le point H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et où AH = HC = 4 et BH = 2. Par rapport au repère (H, C, A), les médiatrices de [BC] et [CA] ont $x = 1$ et $y = x$ pour équations, et le point O a donc pour couple de coordonnées (1, 1).



Supposons alors que, par suite d'une erreur de tracé, la médiatrice de [BC] soit remplacée subrepticement par la droite d'équation $x = 1 + \varepsilon$, avec ε « petit ». Le point O est alors remplacé par le point O_ε de coordonnées $(1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon)$; le point C ayant pour coordonnées $(4, 0)$, le rayon OC est remplacé par

$$O_\varepsilon C = \sqrt{[4 - (1 + \varepsilon)]^2 + (1 + \varepsilon)^2} = \sqrt{10 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2}.$$

Par ailleurs, le point B ayant pour coordonnées $(-2, 0)$, on a

$$O_\varepsilon B = \sqrt{[-2 - (1 + \varepsilon)]^2 + (1 + \varepsilon)^2} = \sqrt{10 + 8\varepsilon + 2\varepsilon^2}.$$

On voit ainsi que l'on a $O_\varepsilon B \geq O_\varepsilon C$ ou $O_\varepsilon B \leq O_\varepsilon C$ selon que $\varepsilon \geq 0$ ou $\varepsilon \leq 0$, l'égalité se produisant si et seulement si $\varepsilon = 0$. Lorsque $\varepsilon \neq 0$, donc, le cercle *ne passe pas* par B.

☛ Supposons, pour fixer les idées, que $\varepsilon > 0$, et considérons alors la différence

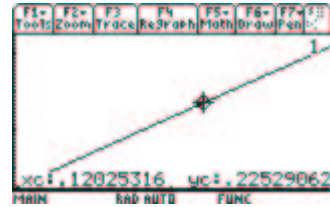
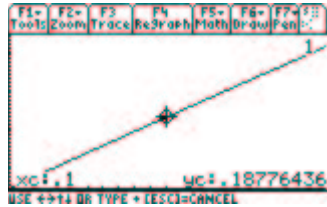
$$\delta_\varepsilon = OB_\varepsilon - OC_\varepsilon = \sqrt{10 + 8\varepsilon + 2\varepsilon^2} - \sqrt{10 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2} = \frac{12\varepsilon}{\sqrt{10 + 8\varepsilon + 2\varepsilon^2} + \sqrt{10 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2}}.$$

On a : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{6}{\sqrt{10}} \approx 1,89736\dots$ Même avec une erreur ε « petite », presque invisible à l'œil pressé ou non éduqué, la distance δ_ε , qui est presque deux fois plus grande, peut fort bien être nettement visible.

☛ Dans le cas très simplifié examiné, on peut encore préciser les choses en étudiant l'application

$$x \mapsto \frac{12x}{\sqrt{10 + 8x + 2x^2} + \sqrt{10 - 4x + 2x^2}}$$

sur l'intervalle $[0 ; 0,2]$ (par exemple). La courbe représentative admet pour tangente à l'origine la droite d'équation $y = \frac{6}{\sqrt{10}}x$, avec laquelle elle se confond pratiquement ici. On obtient ce qui suit :



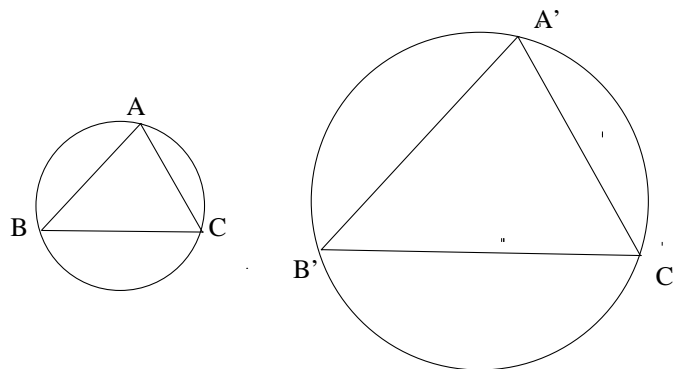
Si l'erreur ϵ est de 0,9 mm, le point B est à une distance δ_ϵ du cercle de plus de 1,5 mm, ce qui commence à se remarquer ; si ϵ est de 1,8 mm, δ_ϵ dépasse 2,5 mm !

☞ Il n'est guère possible d'éliminer les très petites erreurs. Dans certains cas, elles se compensent à peu près, tandis que, dans d'autres cas, elles se cumuleront, sans pour autant qu'on puisse conclure que le dessinateur – l'élève – a été particulièrement maladroit.

☞ En réalité, il faudra, dans la réalisation d'épures « aux instruments » en vue d'une expérimentation graphique admettre le **principe expérimental** suivant : si les points sont **presque** sur le cercle dans toutes les réalisations de l'expérience graphique, on devra considérer que, aux imprécisions de tracé près, le cercle passe effectivement par ces points, et on tiendra alors la chose pour **un fait spatial expérimentalement établi**, ou du moins **très hautement vraisemblable**.

☞ On pourra encore appliquer le principe suivant : lorsqu'on agrandit le tracé dans un rapport $n = 2, 3, \dots$, si la distance δ du point B au cercle n'était pas due aux imprécisions du tracé, elle serait elle aussi augmentée dans le rapport n choisi ; s'il n'en est pas ainsi, on conclura que le phénomène observé résulte très vraisemblablement de l'imprécision du tracé.

☞ À titre d'exemple, on examinera les figures ci-après, réalisées à l'aide du logiciel de géométrie déjà mentionné : les triangles ABC et A'B'C' sont homothétiques l'un de l'autre dans le rapport $2^{\pm 1}$, tandis que les erreurs de tracé sur les médiatrices (non représentées) sont **les mêmes** : les distances δ et δ' ne sont **visiblement pas** dans le rapport $2^{\pm 1}$.



☞ Les difficultés évoqués se retrouvent en fait dans les dessins des manuels d'autrefois, où elles sont, bien sûr, réduites par l'habileté du dessinateur (qui, en général, était un

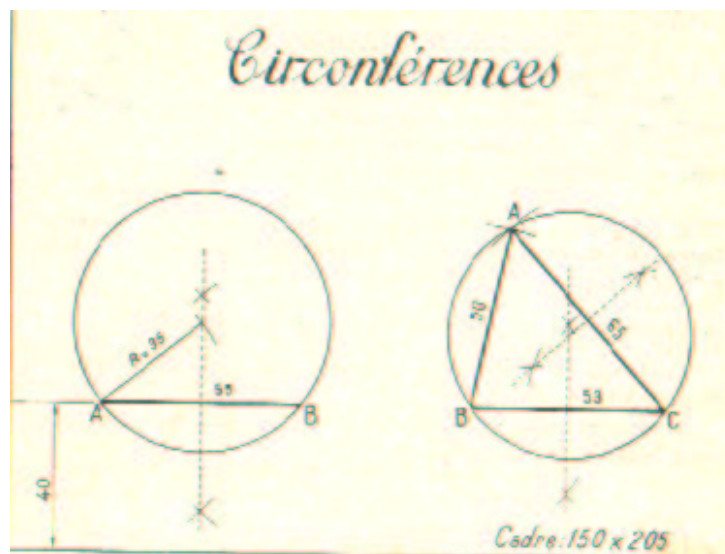
professionnel), et, surtout, *masquées*, en particulier par... l'épaisseur des traits (ce qui fait de ces dessins des *schémas* plutôt que des *épure*s).

☞ On examinera à cet égard le dessin suivant, extrait d'un manuel de 5^e publié en 1958.



Fig. 91.

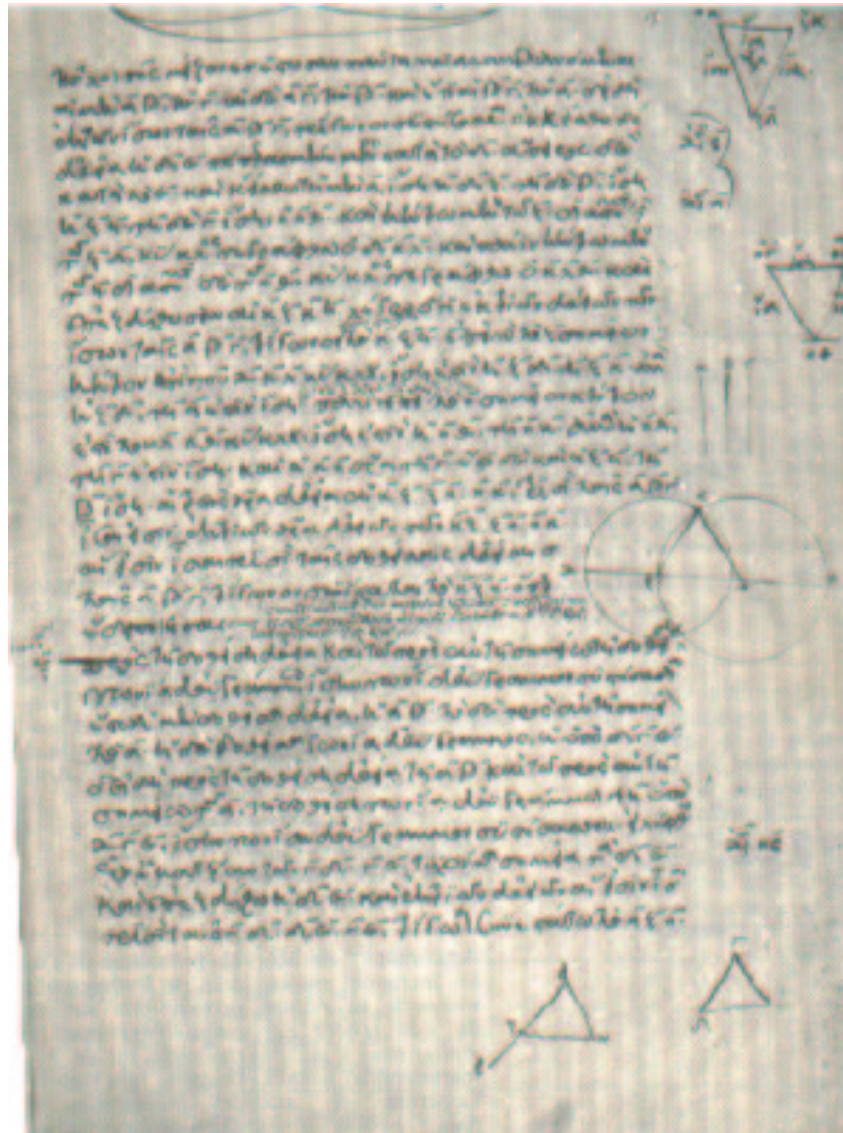
☞ La pratique du « maquillage » plus ou moins habile, destiné à pallier les imprécisions du tracé, se retrouvent même dans les ouvrages de dessin technique, comme dans cet ouvrage, paru en 1957 (et destiné, certes, à former modestement au « dessin géométrique » les candidats au certificat d'études primaires), dont on a extrait les figures ci-après.



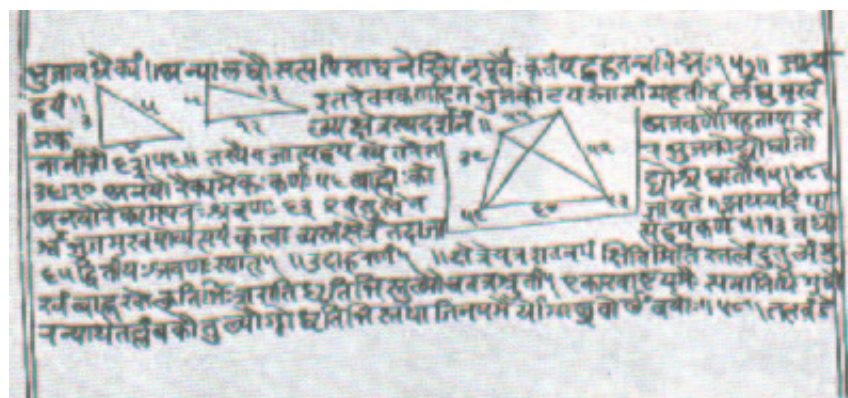
II.5. La théorisation de la science de l'espace

☞ Longtemps, on ne put vraiment compter sur l'expérience graphique pour tester la *vérité* d'une assertion sur l'espace. Les figures contenues dans les textes mathématiques étaient en fait, très visiblement, de simples *schémas*, tracés à la main, destinées à guider raisonnements et calculs, et non des *épure*s, tracées aux instruments, permettant la réalisation d'expériences graphiques.

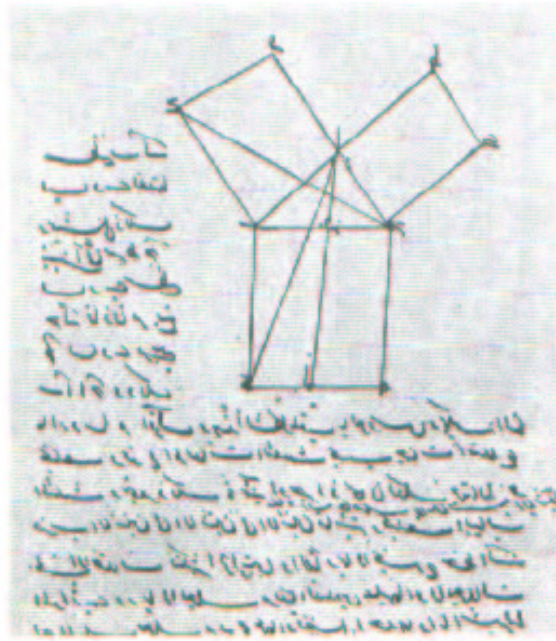
☞ À titre d'illustration, voici d'abord une page d'un manuscrit grec des *Éléments* d'Euclide.



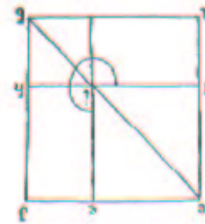
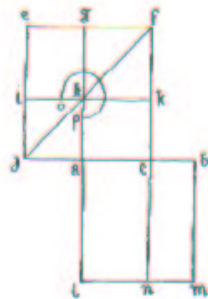
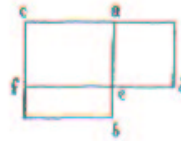
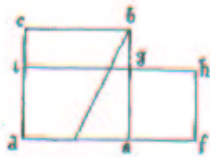
☛ Le texte suivant est une copie du XVI^e siècle d'un ouvrage du mathématicien indien Bhaskara (XII^e s.).



☛ Voici, ensuite, un manuscrit arabe de 1350, copie d'une œuvre de Tâbit Ibn Qorra (vers 980) :



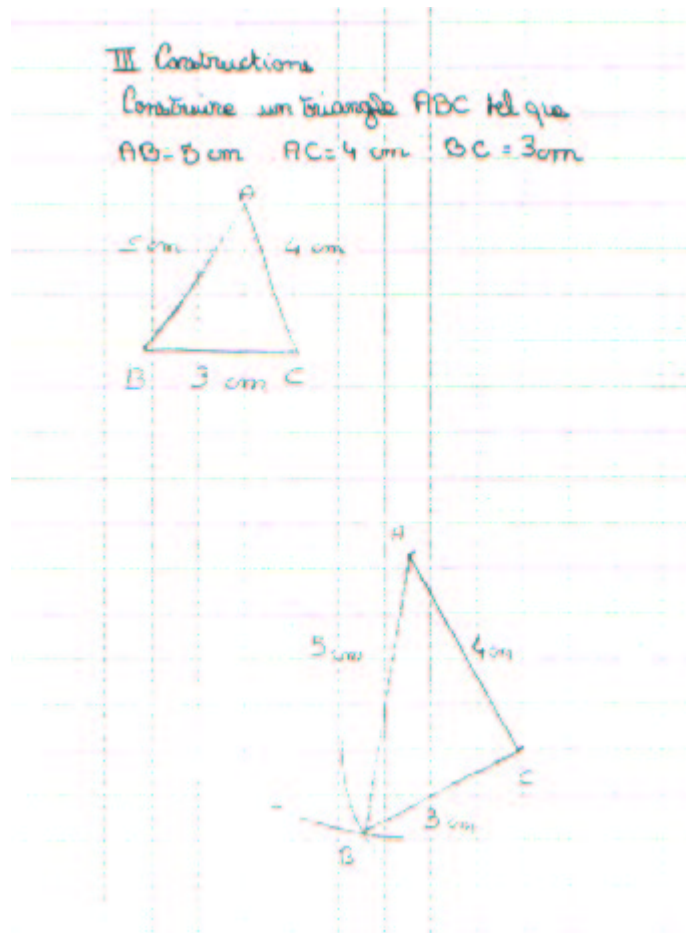
☛ De telles pratiques graphiques se retrouvent en 1509 dans *La divine proportion* de Luca Pacioli.



☞ Pourquoi, aujourd’hui, tracer des figures aux instruments, et non pas, simplement, à main levée ? Contrairement à un usage qui semble devenu dominant, l’emploi des instruments ne se justifie guère quand il répond, non à une exigence *mathématique*, mais à une simple exigence *culturelle* de qualité graphique – exigence liée depuis quelque cinq siècles au développement de *l’imprimerie*.

☞ Au plan mathématique, une figure qui n’est utilisée que comme *support d’un raisonnement* n’a pas, en principe, à être plus précise que ce qu’une main sûre peut tracer : un *schéma* suffit. En revanche, si la figure est le *support d’une expérience graphique*, il convient d’en accroître la précision, en passant du schéma à main levée à l’*épure* tracée aux instruments. Hormis cela, l’obligation de procéder aux instruments ne peut se justifier qu’à titre d’*exercice*, pour améliorer ou cultiver sa capacité à en faire usage.

☞ Dans tous les cas, il est bon de distinguer le *schéma* de l’épure à réaliser de l’*épure* elle-même, comme on le voit dans ce cahier d’un élève de 6^e.



☞ Les mathématiciens grecs ont trouvé un autre moyen de s’assurer de la *vérité* d’une assertion *A* relative à l’espace \mathcal{E} , ce qu’on notera ainsi

$$|\vDash_{\mathcal{E}} A$$

et qu’on lit « l’assertion *A* est vraie dans \mathcal{E} ».

☞ Considérons un ensemble \mathcal{A} formé d'assertions A dont on s'est assuré – ou dont on croit s'être assuré – de façon (nécessairement) expérimentale qu'elles étaient **vraies** dans \mathcal{E} . Si on peut **déduire** A de \mathcal{A} , ce qu'on notera

$$\vdash_{\mathcal{A}} A$$

(ce qu'on lit « l'assertion A est **déductible** de l'ensemble \mathcal{A} d'assertions »), alors on peut conclure que A est vraie dans \mathcal{E} ; ce qui s'écrit ainsi :

$$\text{si } \vdash_{\mathcal{A}} A \text{ alors } \models_{\mathcal{E}} A.$$

Comme dans les autres sciences, on essaie par là de limiter le besoin de procéder à des expériences : la science géométrique, qui est bien, en dernier ressort, d'essence expérimentale, prend alors la forme d'une **théorie déductive**.

☞ L'ensemble d'énoncés \mathcal{A} est appelé l'**axiomatique** de la théorie ; les **théorèmes** A de la théorie sont les assertions déductibles de \mathcal{A} ; si on note \mathcal{T} l'ensemble \mathcal{A} augmenté des théorèmes, soit

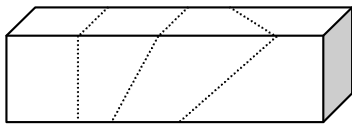
$$\mathcal{T} = \mathcal{A} \cup \{ A / \vdash_{\mathcal{A}} A \},$$

et si l'on observe que l'on a

$$\vdash_{\mathcal{A}} A \text{ si et seulement si } \vdash_{\mathcal{T}} A$$

on peut identifier la théorie à l'ensemble \mathcal{T} .

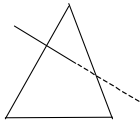
☞ Au lieu d'expérimenter, on va alors, désormais, **raisonner**. Dans le cas du barreau vu plus haut, en s'aidant éventuellement d'un schéma (ci-contre), on pourra raisonner ainsi : lorsqu'on scie le barreau, l'intersection du plan de coupe (celui de la lame de la scie) avec deux faces opposées sont deux droites **parallèles** (puisque ces faces le sont). Par suite, la section est un... parallélogramme, contrairement au « pronostic » proposé plus haut !



☞ Bien qu'extrêmement productif, le point de vue déductif va se heurter à un certain nombre de difficultés.

☞ Une première difficulté tient bien sûr à l'établissement de la **vérité** des axiomes. Si, par exemple, on introduit dans \mathcal{A} le « postulat d'Euclide », comment s'assurer que celui-ci est bien vrai dans l'espace sensible ? Telle est la difficulté affrontée par Gauss lorsqu'il s'emploie à faire réaliser une expérience sur la somme des angles d'un triangle. Si l'on est **sérieux** comme l'était Gauss, on s'apercevra qu'établir la vérité dans \mathcal{E} d'une assertion A ne va pas de soi ! Bien entendu, on peut toujours travailler **conditionnellement**, c'est-à-dire en **supposant** que les axiomes $A \in \mathcal{A}$ sont vrais : la théorie en question sera alors plus justement regardée comme un **système hypothético-déductif**, selon l'expression du géomètre italien Mario Pieri (1860-1913).

☞ Une deuxième difficulté sera révélée par les travaux des mathématiciens du XIX^e siècle : l'appel subreptice à des axiomes clandestins, non déclarés, laissés implicites... C'est ainsi que le mathématicien allemand Moritz Pasch (1843-1930) mettra en avant l'emploi de la propriété

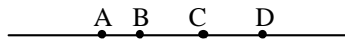


suivante : si une droite qui ne passe par aucun des côtés d'un triangle coupe l'un de ses côtés, alors elle coupe un autre de ses côtés.

☞ Ce type de situations conduit à d'autres ordres de difficulté.

☞ Dans son ouvrage fondamental intitulé *Grundlagen der Geometrie* (1^{re} édition, 1899), David Hilbert (1862-1943), dont l'axiomatique inclut la « propriété de Pasch », retient aussi à titre d'axiome la propriété suivante, « évidente » en tant que fait spatial, mais qui participe en l'espèce de la définition axiomatique de la relation ternaire « A est entre B et C » :

Quatre points d'une droite étant donnés, on peut les désigner par A, B, C, D de telle sorte que le point B soit entre A et C et C entre A et D et que C soit entre A et D et entre B et D.



Or, il se trouve que cet axiome se laisse **déduire** des axiomes déjà retenus par Hilbert ! Mais Hilbert, d'abord, ne le voit pas... C'est le mathématicien américain E.-H. Moore (1862-1932) qui découvrira la chose (1902), et Hilbert en tiendra compte dans la 2^e édition de son livre (1903), où l'axiome devient théorème ! L'exemple illustre un phénomène important : le souci de tout expliciter, d'une part, et celui de réduire le plus possible l'axiomatique, d'autre part, conduit à la fois à s'engager dans un travail déductif parfois **terriblement subtil** afin d'établir démonstrativement des assertions dont, par ailleurs, la **vérité** dans l'espace \mathcal{E} ne fait aucun doute.

☞ On voit ici surgir une distinction essentielle, qui trouble, hélas ! beaucoup l'enseignement actuel : une assertion peut être « évidente » au sens où sa **vérité** en tant que propriété de l'espace est quasi évidente (du point de vue expérimental), sans pour cela que sa **déductibilité** d'un ensemble donné d'assertions soit, elle, « évidente ». Confondre ces deux genres d'évidences est fort dommageable, et il convient donc d'éviter absolument de propager cette confusion ravageuse qui, dès l'antiquité grecque, faisait problème. Dans la proposition 20 du livre I des *Éléments*, Euclide démontre en effet que, en tout triangle ABC, on a $BA+AC > BC$: c'est notre « inégalité triangulaire ». Proclus, au v^e siècle, rapportera à ce propos une critique qui, depuis, n'a guère cessé (Bernard Vitrac, Commentaires, *in* Euclide, *Les Éléments*, PUF, Paris, 1990, p. 234) :

Les Épicuriens raillaient ce théorème, en disant qu'il était évident même pour un âne. Car si l'on place du fourrage à l'une des extrémités d'un côté, l'âne en quête de nourriture, parcourt un seul côté du triangle et non deux !

Les mathématiciens seraient donc plus bêtes que des ânes !

☞ Une troisième difficulté est donc que la construction d'une théorie déductive, \mathcal{T} , des propriétés de l'espace conduit à établir par déduction (c'est-à-dire à démontrer dans \mathcal{T}) des propriétés qui, expérimentalement, nous semblent « évidentes ». Une quatrième difficulté tient à ce que, bien souvent, la découverte de la déduction cherchée n'est elle-même pas du tout « évidente ».

☞ On illustrera ici cette situation par l'exemple d'un chapitre de géométrie des manuels du collège d'autrefois – avant-guerre – intitulé ***Inégalités dans le triangle*** : aujourd'hui à peu

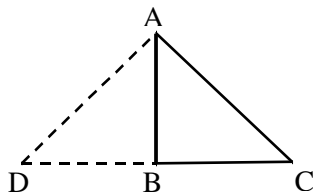
près ignoré des programmes, ce chapitre appartient pourtant à la tradition mathématique depuis Euclide.

① Considérons d'abord l'assertion suivante :

A₁. Dans un triangle rectangle, les angles adjacents à l'hypoténuse sont aigus.

① Cette assertion se laisse *déduire* immédiatement du fait, acquis en 5^e, que la somme des angles d'un triangle est de 180° ; en conséquence, elle est *vraie*. Une vérification expérimentale directe est par ailleurs facile : l'expérience la plus simple consiste à tracer des triangles rectangles et à mesurer les angles adjacents à l'hypoténuse pour s'assurer qu'ils sont aigus.

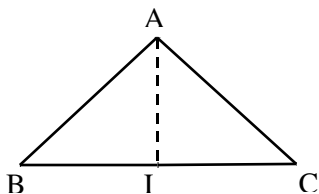
② La démonstration de A₁ que donnaient autrefois les manuels de collège a l'intérêt de faire apparaître la motivation *théorique* de notions présentées trop souvent, à tort, comme purement descriptives – ici, celles d'angle *saillant* et d'angle *aigu* :



∂. Soit un triangle ABC rectangle en B. Soit D le symétrique de C par rapport à (AB) : le triangle CAD est isocèle. L'angle \widehat{CAD} étant *saillant* ($< 180^\circ$), l'angle moitié, soit \widehat{CAB} , est *aigu*. On montre de même que \widehat{BCA} est aigu.

② Ce premier travail déductif se poursuivait par l'examen de l'assertion suivante, elle aussi trivialement vraie dans l'espace sensible :

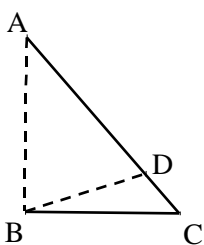
A₂. Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont aigus.



∂. Soit ABC un triangle isocèle en A et soit I le milieu de [BC]. Le triangle AIB étant rectangle en I, l'angle \widehat{ABC} est *aigu*, et il en est de même de \widehat{ACB} ($= \widehat{ABC}$).

③ Des angles, on passait aux côtés ; une technique relativement subtile permettait d'établir le résultat suivant :

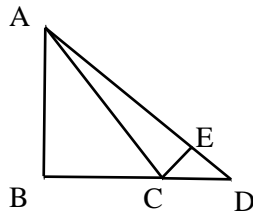
A₃. Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit sont inférieurs à l'hypoténuse.



∂. ABC étant rectangle en B, soit D le point de]AC) tel que $AD = AB$. Le triangle BAD étant isocèle en A, \widehat{ABD} est *aigu*, de sorte que]BD) est *intérieur* à \widehat{ABC} : le point D appartient donc à]AC[. Il en résulte que $AD < AC$, soit que $AB < AC$. On montre de même que $CB < CA$.

④ C'est par la même technique qu'on établissait un quatrième résultat, lui aussi trivialement vrai dans l'espace sensible.

A₄. Soit ABC un triangle rectangle en B et soit D un point de]BC) tel que $BD > BC$. Alors $AD > AC$.

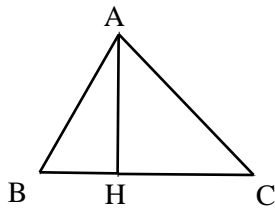


∂. Soit $E \in]AD[$ tel que $AE = AC$. CAE étant isocèle en A , \widehat{ACE} est aigu. Par ailleurs \widehat{ACB} est aigu comme angle non droit du triangle rectangle ABC : son supplémentaire \widehat{ACD} est *obtus*, et donc supérieur à \widehat{ACE} : $\widehat{ACE} < \widehat{ACD}$. Il en résulte que E appartient à $]AD[$: on a ainsi $AE < AD$, soit $AC < AD$.

⑤ On arrivait ainsi à établir démonstrativement un résultat fameux.

A₅. Dans tout triangle le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres, et les angles adjacents sont aigus.

∂. On suppose que $BC > CA > AB$. Dans le triangle rectangle AHB , on a $BH < BA$, et on a donc $BH < BC$. De même, dans le triangle AHC , $CH < CA < CB$.



Comme on a à la fois $BH < BC$ et $CH < CB$, le point H appartient à $]BC[$, et l'on a donc $BC = BH + HC < BA + AC$. Les angles \widehat{ABH} et \widehat{ACH} sont aigus comme adjacents à l'hypoténuse dans les triangles rectangles AHB et AHC . Comme $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACH} = \widehat{ACB}$, les angles en B et C du triangle ABC sont *aigus*.

☞ Concluons. Pour maîtriser conceptuellement la déduction mathématique – la « démonstration » –, il est indispensable de voir *ce qu'elle n'est pas*. On ne peut y parvenir qu'en travaillant encore et encore *la dialectique du vrai et du déductible*, de l'*expérience* et de la *théorie*. Il se trouve que les logiciels de géométrie dynamique renouvellent aujourd'hui la pratique de cette dialectique essentielle.

III. Les logiciels de géométrie entrent en scène

III.1. Géométrie analytique instantanée !

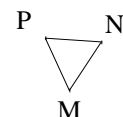
☞ Avec le logiciel GeoplanW, créons un point libre dans le plan, A . On peut demander à GeoplanW d'afficher ses coordonnées x_A et y_A ; on obtient par exemple ceci.

$$x_A : -0.095345$$

$$y_A : 0.538019$$

Le logiciel, en réalité, *fait de la géométrie « analytique »*, c'est-à-dire *calcule* – des coordonnées, des longueurs, des angles, etc. – et affiche à l'écran la traduction *graphique* de ses calculs.

☞ Considérons ainsi la figure déjà présentée plus haut, relative au triangle MNP formé par les trisectrices d'un triangle ABC . Le logiciel GeoplanW affiche les valeurs suivantes (il ne peut afficher que 6 décimales au plus) :



$$x_M = 0.182896, y_M = -0.422345$$

$$x_N = 0.655972, y_N = 0.279018$$

$$x_P = -0.187964, y_P = 0.338032$$

☞ Lorsqu'on l'interroge sur les longueurs des côtés du triangle MNP, le logiciel affiche ceci :

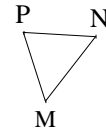
$$MN = 0.845997$$

$$NP = 0.845997$$

$$PM = 0.845997.$$

L'assertion à tester apparaît, en ce cas, *vérifiée*.

☞ Dans le cas de la figure ci-après (où l'on a simulé des imprécisions de tracé), on obtient (en ne demandant l'affichage que de 3 décimales) :



$$MN = 0.893 ; NP = 0.806 ; PM = 0.811.$$

Cette fois, le triangle n'est plus équilatéral !

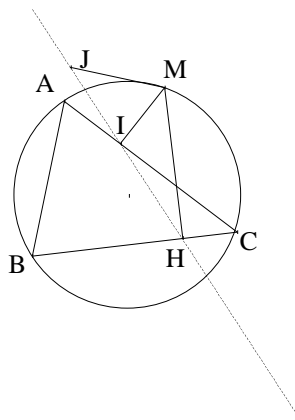
☞ Le logiciel peut afficher bien d'autres valeurs calculées.

☞ On peut ainsi, dans le cas précédent, obtenir les valeurs en degrés des angles de MNP :

$$\widehat{M} = 56.22^\circ ; \widehat{N} = 56.71^\circ ; \widehat{P} = 67.07^\circ.$$

Dans le cas où l'on ne simule pas d'erreurs de tracé, on obtient en revanche $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = 60^\circ$.

☞ Considérons à titre d'illustration la figure obtenue ainsi : on choisit un point O et un point A, puis deux points B et C sur le cercle \mathcal{C} de centre O passant par A, enfin un point M de ce même cercle, et on considère alors les projetés orthogonaux H, I, J de M sur les côtés (BC), (CA), (AB) du triangle ABC.



Il semble bien que les points H, I, J soient alignés. On peut demander au logiciel d'afficher la valeur des coefficients directeurs m_I et m_J des droites (HI) et (HJ) par exemple ; on a ici :

$$m_I = m_J = -1,531285.$$

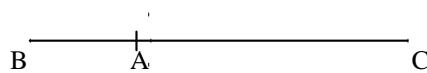
L'alignement est confirmé.

☛ L'utilisation faite ici – à propos de la « droite de Simpson » – de GeoplanW consiste en vérité à faire réaliser par le logiciel une expérience *numérique*, dont une *représentation graphique* apparaît en même temps à l'écran : on peut parler à cet égard d'expérience *pseudo-graphique* ou, plus justement, d'expérience *numérico-graphique*.

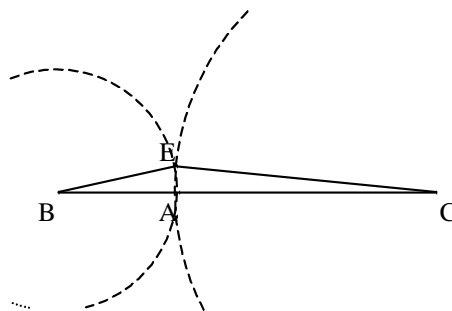
☛ De même qu'une expérience graphique souffre généralement d'une certaine imprécision, de même un logiciel de géométrie n'est pas « infiniment précis ». Mais, ainsi qu'on l'a vu déjà, il permet de mieux comprendre – en les simulant – certains phénomènes graphiques liés à l'imprécision des tracés graphiques.

☛ Lorsqu'on demande à des élèves de 5^e, qui par exemple ont pu constater qu'il n'existait pas de triangle dont les côtés aient pour mesures 4, 5, 11, s'il existe bien, en revanche, un triangle dont les côtés ont pour mesures 4, 5 et 9, on observe que, après quelques minutes de travail graphique, nombre d'entre eux *concluent à l'existence d'un tel triangle*. De fait, le triangle obtenu (à la règle et au compas) apparaît certes aplati, *mais pas* « plat » (avec sommets alignés).

☛ L'explication fondamentale de ce résultat (erroné) se trouve dans l'imprécision du tracé. Soit deux points B et C, et soit $A \in]BC[$.



La construction usuelle du point A consiste à l'obtenir comme intersection du cercle $\mathcal{C}(B ; BA)$ avec le cercle $\mathcal{C}(C ; CA)$. Supposons alors que, par l'effet d'une légère imprécision, l'ouverture du compas traceur soit égale respectivement à $1,01 BA$ et $1,01 CA$ (nombres qui, pour $BA = 4$ et $CA = 5$, sont égaux à $4,04$ et $5,05$ respectivement). Les cercles $\mathcal{C}(B ; 1,01BA)$ et $\mathcal{C}(C ; 1,01CA)$ ne sont plus alors *tangents en A* mais *sécants en E et F*, comme le montre la figure ci-après, obtenue à l'aide de GeoplanW.

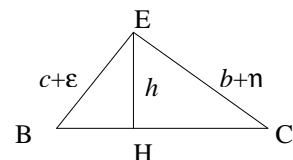


Dans la situation illustrée par la figure précédente, en utilisant les six décimales que proposent d'afficher le logiciel, on a :

$$BA = 3,919234 ; BE = 3,958426 ; CA = 6,418455 ; CF = 6,48264.$$

En désignant par H le projeté orthogonal de E sur (BC), on a alors : $EH = 0,710629$. Si l'unité est le centimètre, cette hauteur est bien suffisante pour qu'on regarde BEC comme un « vrai triangle » !

☛ À nouveau, on peut retrouver rapidement les valeurs numériques données par l'ordinateur. Considérons le schéma ci-contre. L'aire de BEH est égale d'une part à $\frac{1}{2} ha$ (où $a = b+c$),



d'autre part, d'après la formule de Héron, à $\sqrt{p(p-a)(p-b-\eta)(p-c-\varepsilon)}$, où p est la demi-somme des mesures des côtés. On a donc : $h = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b-\eta)(p-c-\varepsilon)}$. On a :

$$p = \frac{1}{2}[a+(b+\eta)+(c+\varepsilon)] = b+c+\frac{1}{2}(\varepsilon+\eta) ; p-a = p-(b+c) = \frac{1}{2}(\varepsilon+\eta) ;$$

$$p-b-\eta = c+\frac{1}{2}(\varepsilon-\eta) ; p-c-\varepsilon = b-\frac{1}{2}(\varepsilon-\eta).$$

Il vient donc :

$$h^2 = \frac{4}{(b+c)^2} \left[b+c + \frac{1}{2}(\varepsilon+\eta) \right] \left[\frac{1}{2}(\varepsilon+\eta) \right] \left[c + \frac{1}{2}(\varepsilon-\eta) \right] \left[b - \frac{1}{2}(\varepsilon-\eta) \right]$$

$$= \frac{2bc}{b+c} \left(1 + \frac{\varepsilon+\eta}{2(b+c)} \right) \left(1 + \frac{\varepsilon-\eta}{2c} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon-\eta}{2b} \right) (\varepsilon+\eta).$$

Pour simplifier les calculs, on peut négliger les trois facteurs de la forme $(1 \pm \dots)$. Il vient alors :

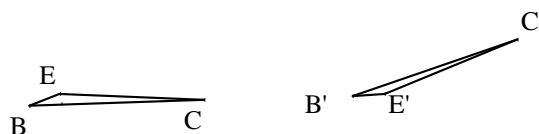
$$h^2 \approx \frac{2bc}{b+c} (\varepsilon+\eta).$$

Dans le cas où, comme ci-dessus, on a $c+\varepsilon = (1+r)c$ et $b+\eta = (1+r)b$, il vient $\varepsilon = rc$ et $\eta = rb$, et on a ainsi : $h^2 \approx 2rbc$. Pour $r = 0,01$, $b = 6,418455$, $c = 3,919234$, il vient :

$$h^2 \approx 2 \times 0,01 \times 6,418455 \times 3,919234 =_{\text{calc}} 0,5031085412694.$$

On obtient alors $h \approx 0,70930\dots$, ce qui confirme le résultat affiché par le logiciel (0,710629).

☞ Un autre phénomène observé dans le même contexte semble avoir troublé davantage encore les observateurs : le triangle obtenu apparaît « exister d'autant plus » qu'on commence à le construire par un plus petit côté ! De fait, la figure ci-dessous a été obtenue en reprenant (à droite) la construction du triangle demandé en commençant par le petit côté, alors que la première construction (à gauche) avait été commencée par le grand côté : le contraste est éloquent !



Le modèle mathématique déjà utilisé explique aisément la chose : ici, on a

$$h' \approx 2rab = \frac{a}{c} (2rbc) \approx \frac{a}{c} h.$$

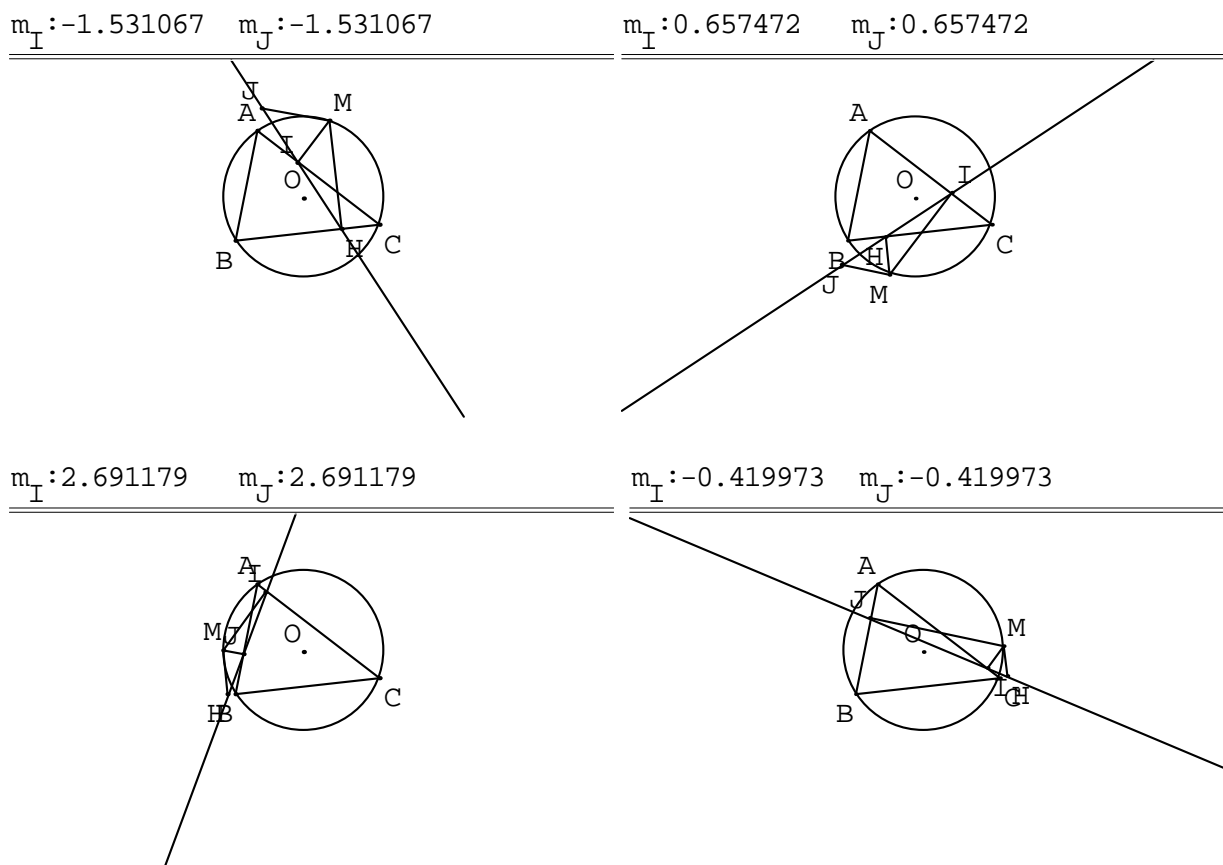
Dans le cas vu plus haut, $\frac{a}{c} = 1 + \frac{b}{c} \approx 2,6\dots$

☞ La clé des phénomènes analysés se trouve dans le fait que h est proportionnel à la **racine carrée** de l'erreur : $h \approx K\sqrt{\varepsilon+\eta}$ où $K = \sqrt{\frac{2bc}{b+c}}$. Cette non-linéarité entraîne qu'une cause « imperceptible » (l'erreur $\varepsilon+\eta$) peut se traduire par un effet « visible à l'œil nu » (la hauteur h).

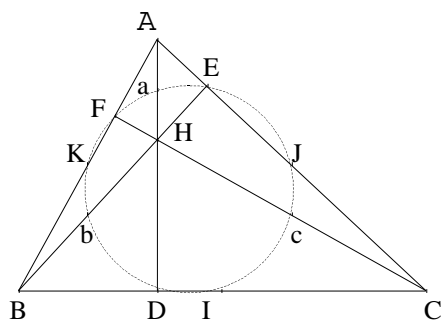
III.2. Expériences pseudo-graphiques

☞ Le grand avantage des logiciels de géométrie actuels est de combiner des calculs quasi instantanés avec la possibilité de modifier les paramètres entrant dans ces calculs, et cela par l'intermédiaire de l'interface graphique. Au lieu d'*une* expérience numérique, on obtient ainsi, à vil prix, *un très grand nombre* d'expériences : de là le nom de logiciels de géométrie *dynamique* donné à des logiciels comme GeoplanW.

☞ Dans l'expérience relative à la droite de Simpson, on peut ainsi déplacer le point M sur le cercle pour s'assurer que l'alignement de H, I, J ne dépend pas du point M.



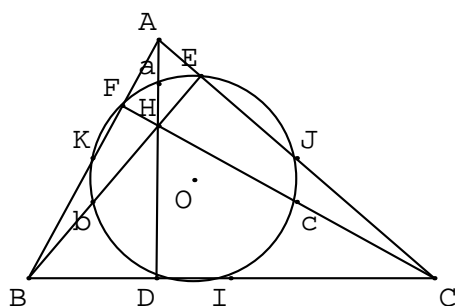
☞ Très souvent, il n'est nullement besoin de contrôler des indices numériques (tels les coefficients directeurs, ici) pour conclure : *l'évidence graphique* suffit. À titre d'exemple, considérons la configuration suivante : un triangle ABC étant donné, on considère les milieux I, J, K de ses côtés, les pieds D, E, F des hauteurs, les milieux a, b, c des segments [AH], [BH], [CH], où H est l'orthocentre de ABC.



Sur cette figure (obtenue à l'aide de GeoplanW), il n'est pas complètement évident que le cercle – appelé classiquement *cercle d'Euler* (ou cercle *des neuf points*) – qui passe par les milieux I, J, K passe aussi par D, E, F, a, b, c : il semble y avoir un problème pour le point D, par exemple. La chose est due en fait à la plus grande imprécision de la représentation graphique par rapport à celle des calculs effectués ; mais cette incertitude disparaît dès lors qu'on passe d'une exploitation *statique* à une exploitation *dynamique* du logiciel.

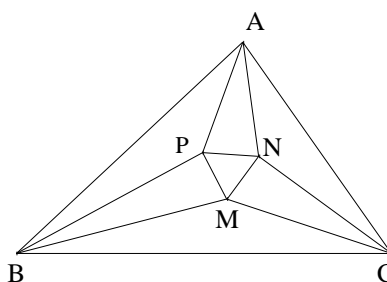
☞ Bien entendu, on peut vouloir vérifier *numériquement* ce que la représentation graphique suggère si fortement. Introduisons ici le centre O du cercle passant par I, J, K et les variables numériques $r = OI$ et $d = OD$; le logiciel affiche alors ceci (en dépit de l'image ci-dessous...) :

r:0.942551 d:0.942551



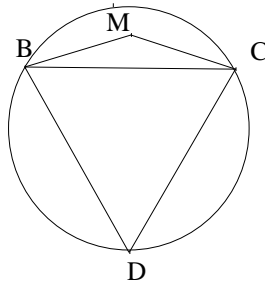
☞ Ce qu'il y a de plus neuf dans l'exploitation d'un logiciel de géométrie dynamique, c'est la *conception* d'expériences numérico-graphiques. Dans le cas de la droite de Simpson ou du cercle d'Euler, la construction à faire peut se calquer sur la description de la configuration à construire. Mais, dans d'autres cas, un certain degré d'invention et la mobilisation de connaissances géométriques déterminées sont fort utiles.

☞ Revenons au problème des trisectrices. Dans le travail accompli plus haut, seuls les points B et C sont mobiles : tous les autres sont définies à partir d'eux et des paramètres α et β . Comment procéder pour obtenir la figure voulue de façon à pouvoir déplacer le point M par exemple ?

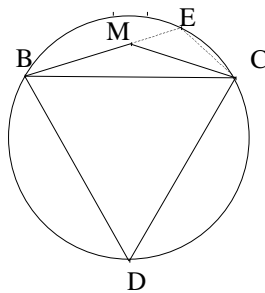


☞ Contrairement aux bissectrices, les trisectrices ne figurent pas dans les programmes de construction primitifs du logiciel utilisé. (On sait, au reste, que, étant donné un angle, il n'est pas en général possible de construire ses trisectrices *à la règle et au compas*.)

① On doit d'abord choisir M de sorte que la somme des angles \widehat{CBM} et \widehat{BCM} soit inférieure à 60° , soit donc de façon que l'angle \widehat{BMC} soit supérieur à $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Pour « géométriser » cette situation, on peut construire sur [BC] un triangle équilatéral BCD, puis le cercle circonscrit à BCD : l'arc de ce cercle situé du côté de (BC) qui ne contient pas D est l'ensemble des points d'où, dans ce demi-plan, on voit [BC] sous un angle de 120° , et l'intérieur du segment de disque limité par la corde [BC] et cet arc de cercle est l'ensemble des points n'appartenant pas à [BC] d'où l'on voit [BC] sous un angle strictement supérieur à 120° : c'est là que l'on doit choisir M.



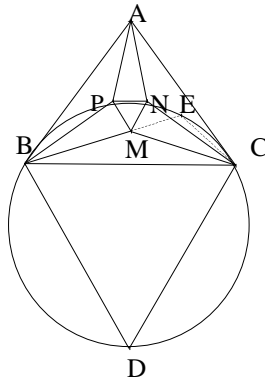
② Peut-on faire apparaître géométriquement l'angle de mesure en degrés $\gamma = 60 - (\alpha + \beta)$?
 La droite (BM) coupe le cercle (BCD) en E (voir ci-dessous).



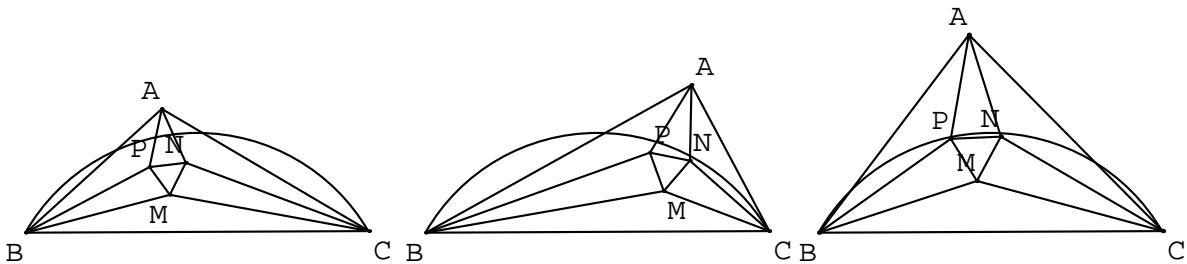
La somme des angles \widehat{CBM} et \widehat{BCM} apparaît sous la forme de l'angle \widehat{EMC} . On a :

$$\widehat{MCE} = 180^\circ - \widehat{EMC} - \widehat{MEC} = 180^\circ - (\widehat{CBM} + \widehat{BCM}) - 120^\circ = 60^\circ - (\alpha^\circ + \beta^\circ) = \gamma^\circ.$$

L'angle cherché est donc \widehat{MCE} ! On utilise ce fait pour construire les trisectrices de l'angle \widehat{A} , ce qui donne la figure suivante.



☞ On peut alors faire bouger le point M pour vérifier visuellement si MNP conserve l'allure d'un triangle équilatéral. On obtient par exemple les figures suivantes.



La conclusion ne fait plus de doute !

III.3. Expérience et déduction

☞ Soit une assertion A dont on a établi expérimentalement la vérité :

$$\models_{\mathcal{E}} A.$$

Il devient raisonnable alors de se demander si on peut la *déduire* des axiomes retenus et des théorèmes déjà établis :

$$\vdash_{\mathcal{T}} A ?$$

Le travail à réaliser peut être facilité par l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique : on illustrera ce fait à propos de la propriété dite du cercle d'Euler.

☞ D'une façon générale, si l'on doit établir déductivement une assertion implicative

$$P \Rightarrow Q,$$

on recherche une assertion Q_1 qui soit une condition *suffisante* de Q , c'est-à-dire telle que

$$\vdash_{\mathcal{T}} Q_1 \Rightarrow Q,$$

et qui soit en même temps une condition *nécessaire* de P , c'est-à-dire telle que

$$\vdash_{\mathcal{T}} P \Rightarrow Q_1.$$

Ici, la propriété Q est « les points $a, F, K, b, D, I, c, J, E$ sont cocycliques ». À un niveau élémentaire, comment établir que quatre points sont cocycliques ? En établissant qu'ils sont les sommets d'un *rectangle*. Telle peut donc être la propriété Q_1 à essayer. Nous savons que l'on a :

$$\vdash_{\mathcal{T}} Q_1 \Rightarrow Q.$$

Il reste à voir si l'on a bien

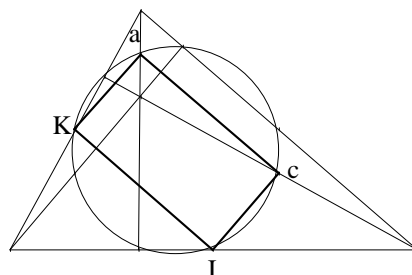
$$\vdash_{\mathcal{T}} P \Rightarrow Q_1.$$

Avant d'examiner la chose, on va alors s'assurer que l'on a bien

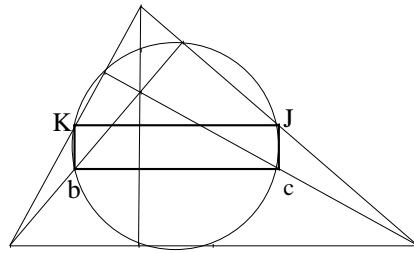
$$\models_{\mathcal{E}} P \Rightarrow Q_1$$

sans quoi il faudrait rejeter Q_1 ... Pour cela on va procéder à une expérience pseudographique, au demeurant presque immédiate.

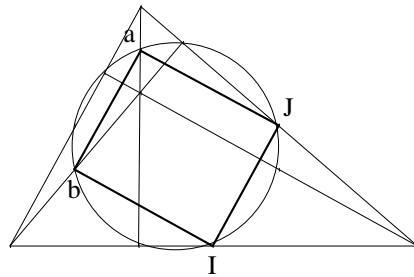
☞ En examinant les neuf points, on observe par exemple que le quadrilatère $aKic$ semble être un rectangle.



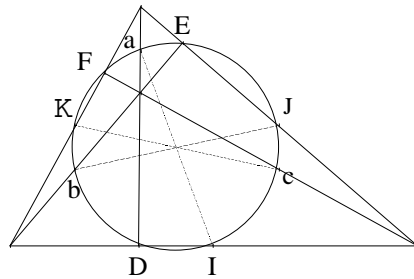
La dynamisation de la figure permet de s'assurer que la propriété est vraie : les quatre points sont sur le cercle dont $[aI]$ et $[Kc]$ sont des diamètres. De la même façon, le quadrilatère $KbcJ$ s'avère être un rectangle :



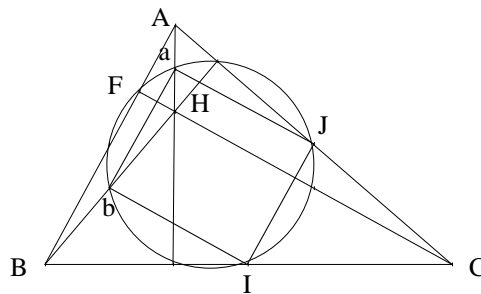
Les points b et J appartiennent donc aussi au cercle de diamètre $[Kc]$: les 6 points a, K, b, I, c, J sont ainsi cocycliques. On trouve de même que $aJ Ib$ est un rectangle (voir ci-après), mais cela n'enrichit pas la série des points cocycliques connus jusque ici...



Il manque les pieds des perpendiculaires ; mais il est clair que, si l'on peut établir que a, K, b, I, c, J sont sur un cercle Γ dont $[aI], [bJ], [Kc]$ sont des diamètres, D appartient au cercle de diamètre $[aI]$, E au cercle de diamètre $[bJ]$, F au cercle de diamètre $[Kc]$, c'est-à-dire à Γ , comme le montre la figure ci-après.



☛ Il reste donc à **déduire** le fait que $aKIc$ et $KbcJ$ sont des rectangles. Reprenons pour cela la figure suivante, qui se rapporte à $aKIc$ (la démonstration se transfère sans problème à $aKIc$ et $KbcJ$).



Dans le triangle AHB, [ab], qui joint les milieux des côtés [AH] et [HB], est parallèle à [AB] ; de même, dans le triangle ACB, [JI] est parallèle à [AB]. Semblablement, dans les triangles AFC et BFC, les côtés [aJ] et [bI] sont parallèles à [CF]. Le quadrilatère aKIC est donc un parallélogramme. Comme, en outre, les droites (CF) et (AB) sont perpendiculaires, il s'agit d'un rectangle. Le théorème du cercle des neuf points est donc démontré.

☞ On n'établira pas ici – déductivement – la propriété des trisectrices : cette propriété a, semble-t-il, été démontrée pour la première fois en 1899 par le mathématicien Frank Morley (1860-1937). On laissera également le lecteur s'interroger sur la figure qu'Euclide mobilise dans sa démonstration du théorème de Pythagore², ou encore sur la droite de Simpson et le théorème de Wallace – lequel énonce que les projetés orthogonaux d'un point M sur les côtés d'un triangle ABC sont alignés si, et seulement si, M appartient au cercle circonscrit à ABC. Tous ces exemples illustrent le schéma d'un usage pertinent des logiciels de géométrie dynamique : 1. Chercher à s'assurer qu'une assertion A donnée est vraie ou à découvrir l'assertion A* qui est vraie ; 2) Chercher à déduire A (ou A*) de la théorie géométrique disponible, et pour cela utiliser le logiciel pour s'assurer de la vérité des pas de déduction que l'on envisage d'accomplir. On trouvera, ci-après, un petit nombre de problèmes sur lesquels on pourra s'exercer : dans chacun d'eux, on part d'un triangle ABC et d'un point P de son plan, distinct de A, B, C.

1. On considère la droite d_A symétrique de (PA) par rapport à la bissectrice intérieure de \widehat{A} . On définit semblablement les droites d_B, d_C . Ces trois droites sont-elles concourantes ? Sinon quel est l'ensemble des points P pour lesquels elles concourent ?
2. La droite (PA) coupe (BC) en M ; on considère la droite $d_A = (AM')$ où M' est tel que $\overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{MB}$. On définit semblablement les droites d_B, d_C . Ces trois droites sont-elles concourantes ? Sinon quel est l'ensemble des points P pour lesquels elles concourent ?
3. On considère la droite $d_A = (AM)$ où M est le projeté orthogonal de P sur (BC). On définit semblablement les droites d_B, d_C . Ces trois droites sont-elles concourantes ? Sinon quel est l'ensemble des points P pour lesquels elles concourent ?
4. La droite (PA) coupe (BC) en M ; on considère la droite d_A perpendiculaire en M à (BC). On définit semblablement les droites d_B, d_C . Ces trois droites sont-elles concourantes ? Sinon quel est l'ensemble des points P pour lesquels elles concourent ?
5. On considère la droite d_A perpendiculaire en A à (AP). On définit semblablement les droites d_B, d_C . Ces trois droites sont-elles concourantes ? Sinon quel est l'ensemble des points P pour lesquels elles concourent ?
6. La droite (PA) coupe (BC) en M ; on considère la droite d_A perpendiculaire en M à (AP). On définit semblablement les droites d_B, d_C . Ces trois droites sont-elles concourantes ? Sinon quel est l'ensemble des points P pour lesquels elles concourent ?
7. On considère la droite d_A perpendiculaire en A à (AP) ; cette droite coupe (BC) en X. On définit semblablement les points Y et Z. Ces trois points sont-ils alignés ? Sinon quel est l'ensemble des points P pour lesquels ils le sont ?

² Le théorème correspondant semble avoir été démontré pour la première fois par Vecten, ancien professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes, en 1817.