IUFM de l'Académie d'Aix-Marseille
Filière « Mathématiques »
Année 2005-2006

PETITS PROBLÈMES POUR PRÉPARER LA RENTRÉE… ET LE CAPES

Problème 1. Dans ce qui suit, on désigne par d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$: pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $a(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que a est une bijection strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et que, pour tout $y \in\ ]-1,1[$, $a^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$.

2. Soit $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On prolonge l'ordre de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$, et on prolonge l'application a à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $\tilde{a}(-\infty) = -1$ et $\tilde{a}(+\infty) = 1$, de sorte que $\tilde{a}(\overline{\mathbb{R}}) = [-1,1]$. On note $\tilde{a}^{-1}$ l'application réciproque de $\tilde{a}$, de sorte que $\tilde{a}^{-1}(-1) = -\infty$ et $\tilde{a}^{-1}(1) = +\infty$. Enfin on pose, pour tous x, $y \in \overline{\mathbb{R}}$, $\delta(x,y) = d(\tilde{a}(x),\tilde{a}(y))$.

a) Montrer que δ est une distance bornée sur $\overline{\mathbb{R}}$. Que vaut $\delta(-\infty,+\infty)$?

b) On désigne par $\delta_{\mathbb{R}}$ la restriction à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de la distance δ : pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $\delta_{\mathbb{R}}(x,y) = d(\tilde{a}(x),\tilde{a}(y)) = d(a(x),a(y))$. Montrer qu'une suite de points de $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$ au sens de $\delta_{\mathbb{R}}$ si et seulement si elle converge au sens de d.

c) Montrer que l'espace métrique $(\overline{\mathbb{R}},\delta)$ est complet.

Problème 2. 1. On note 0 l'élément $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ et $d(x,y)$ la distance euclidienne entre deux points x et y de $\mathbb{R}^2$: si $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2)$, alors $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$. Montrer que $|d(0,x)-d(0,y)| \leq d(x,y)$ pour tous x, $y \in \mathbb{R}^2$. En déduire que l'application $x \mapsto d(0,x)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ est continue.

2. Soit F une partie fermée non vide de $\mathbb{R}^2$ telle que $0 \notin F$. Montrer qu'il existe $u \in F$ tel que, pour tout $x \in F$, $d(0,x) \geq d(0,u)$.

3. On prend $F = \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x_2 \geq 1-|x_1| \}$.

a) Montrer que F est un fermé non vide de $\mathbb{R}^2$ tel que $0 \notin F$.

b) Montrer qu'il existe exactement deux points $u \in F$ tels que, pour tout $x \in F$, $d(0,x) \geq d(0,u)$.

4. Soit C une partie convexe, fermée et non vide de $\mathbb{R}^2$ telle que $0 \notin C$.

a) Montrer qu'il existe un unique point $u \in C$ tel que, pour tout $x \in C$, $d(0,x) \geq d(0,u)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in C$, on a $u\cdot(x-u) \geq 0$. En déduire que C est inclus dans le demi-plan ouvert déterminé par la médiatrice de $[0,u]$ qui ne contient pas 0.

Problème 3. 1. Soit $\|\ \|$ une *valeur absolue* sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une application $x \mapsto \|x\|$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants : VA_1. $\|x\| \Leftrightarrow x = 0$; VA_2. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $\|xy\| = \|x\|\ \|y\|$; VA_3. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

a) Montrer successivement que $\|1\| = \|1\|^2$, $\|1\| = 1$, $\|-1\|^2 = 1$, $\|-1\| = 1$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|-x\| = \|x\|$. Montrer en outre que $\|x^{-1}\| = \|x\|^{-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

b) Pour x, $y \in \mathbb{R}$, on pose $\delta(x,y) = \|x-y\|$. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}$ et que, dans l'espace métrique $(\mathbb{R},\delta)$, on a l'équivalence : $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Leftrightarrow \|x\| < 1$.

2. On note $|\ |$ la valeur absolue usuelle, définie par $|x| = \sup(x,-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $r \in\ ]0,+\infty[$.

a) Vérifier que l'application $x \mapsto |x|^r$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ satisfait les axiomes VA_1 et VA_2.

b) Montrer que, si $0 < r < 1$, alors pour tout $x > 0$ on a : $(1+x)^r \leq 1+x^r$. En déduire que l'application $|\ |^r$ satisfait l'axiome VA_3 si $0 < r < 1$. En est-il de même si $r > 1$?

c) On note d la distance sur $\mathbb{R}$ associée à $|\ |$, et, pour $r \in\ ]0,1[$, d_r celle associée à $|\ |^r$. Montrer que les espaces métriques $(\mathbb{R},d)$ et $(\mathbb{R},d_r)$ ont les mêmes suites convergentes.

3. On suppose que $\|\ \|$ est une valeur absolue sur $\mathbb{R}$ telle que les espaces métriques $(\mathbb{R},d)$ et $(\mathbb{R},\delta)$ ont les mêmes suites convergentes.

a) Montrer que l'on a : $\|x\| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$.

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|x_0| > 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ soit $\gamma > 0$ tel que $|x| = |x_0|^\gamma$. Montrer que si m, $n \in \mathbb{Z}^*$ vérifient $m/n > \gamma$ (resp., $m/n < \gamma$), alors $\|x\| < \|x_0\|^{m/n}$ (resp., $\|x\| > \|x_0\|^{m/n}$). En déduire que $\|x\| = \|x_0\|^\gamma$.

c) Soit r tel que $\|x_0\| = |x_0|^r$. Montrer que $r > 0$. Déduire de ce qui précède que $\|\ \| = |\ |^r$.

Problème 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est *algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \neq 0$, tel que $P(\alpha) = 0$. Dans le cas contraire, on dit que α est *transcendant*. Dans ce qui suit, on démontre que le nombre $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!}$ est transcendant.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} 10^{-i!}$.

a) Montrer que, pour tous $i, k \in \mathbb{N}^*$, si $i \geq k+1$, alors $i! - (k+1)! \geq i - (k+1)$.

b) À l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < \alpha - \alpha_k < 2/10^{(k+1)!}$ et $0 < \alpha_k < \alpha < 1$.

2. On suppose α algébrique. Soit alors $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tels que $P(\alpha) = 0$, où $P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$. On pose $C = \sum_{j=0}^{n} j|a_j|$.

a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|P(\alpha_k)| < 2C/10^{(k+1)!}$.

b) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et pour $0 \leq j \leq n$, α_k^j s'écrit sous la forme $N_{k,j}/10^{j \cdot k!}$, où $N_{k,j} \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand, on a $P(\alpha_k) \neq 0$. En utilisant le résultat précédent, en déduire que $|P(\alpha_k)| \geq 1/10^{n \cdot k!}$.

d) Vérifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand, $1/10^{n \cdot k!} > 2C/10^{(k+1)!}$. Que peut-on en conclure ?

Problème 5. Dans ce qui suit, on démontre de trois manières différentes le résultat suivant : A et B étant deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, si AB = I, alors BA = I (où I est la matrice unité d'ordre n).

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $X = \{x_i\}$ une base de E, f et g les endomorphismes de E ayant respectivement pour matrices A et B dans la base X. Montrer que $g(X)$ est une base de E. En utilisant cette base, montrer que $gf(y) = y$ pour tout y dans E. En déduire le résultat annoncé.

2. Montrer que si une matrice inversible M est idempotente ($M^2 = M$), alors M = I. En déduire le résultat annoncé.

3. Montrer que les matrices I, A, A^2, ..., A^m ($m = n^2$) sont linéairement dépendantes. En déduire que B peut s'écrire comme un polynôme en A. En déduire le résultat annoncé.

Problème 6. L'objet du problème est de calculer l'intégrale $J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

1. On considère l'application φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$. Montrer, sans calculer la dérivée φ', que φ décroît strictement de $\varphi(0) = \pi/4$ à $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$.

2. Montrer, sans justifier le calcul, que, pour $x > 0$, on a : $\varphi'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\psi(\sqrt{x})$, où $\psi(z) = \int_0^z e^{-u^2}\, du$.

3. Soit $X \geq \varepsilon > 0$. Montrer que l'on a $\int_\varepsilon^X \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\psi(\sqrt{x})\, dx = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{X}} \psi'(z)\psi(z)\, dz$. En déduire que $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème 7. Toute transformation affine T de $\mathbb{R}^2$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $T(x) = \varphi(x)+b$, où φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $b \in \mathbb{R}^2$. Dans ce qui suit on détermine les transformations affines T vérifiant les conditions suivantes : (1) pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $T(x) \neq x$; (2) pour toute droite affine D, $T(D) \not\subset D$.

1. Soit $B = \{u_1,u_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ et soit $b = b_1u_1+b_2u_2 \in \mathbb{R}^2$, avec $b_2 \neq 0$. Pour tout $x = x_1u_1+x_2u_2$, où $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = (x_1+x_2)u_1+x_2u_2$. En considérant le déterminant des vecteurs $T(x)-x$ et $T^2(x)-x$ dans la base B, montrer que $T(x)-x$ et $T^2(x)-x$ sont linéairement indépendants, quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$. En déduire que T vérifie les conditions (1) et (2).

2. Dans cette question, on démontre que, réciproquement, si une transformation affine $T = \varphi+b$ vérifie (1) et (2), alors elle est de la forme indiquée dans la question précédente.

a) Soit T vérifiant (1) et (2). Montrer que l'endomorphisme $\varphi-\mathrm{Id} : x \mapsto \varphi(x)-x$ n'est pas surjectif. En déduire que φ admet 1 pour valeur propre.

b) Soit $u_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(u_1) = u_1$. En considérant la droite $D = \mathbb{R}u_1$, montrer que $b \notin \mathbb{R}u_1$.

c) On suppose que φ possède une valeur propre réelle $\mu \neq 1$. Soit v un vecteur propre relatif à μ. Montrer alors qu'il existe $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $b = ru_1+s(1-\mu)v$, et que la droite affine $D = sv+\mathbb{R}u_1$ vérifie $T(D) = D$. En déduire que 1 est une valeur propre double de φ, et que $(\varphi-\mathrm{Id})^2 = 0$.
d) Soit $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\{u_1,v\}$ soit une base. On pose $\varphi(v) = \lambda u_1+\mu v$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on peut choisir v de façon que $\lambda = 1$. En utilisant l'égalité $(\varphi-\mathrm{Id})^2 = 0$, montrer alors que $\mu = 1$. Que peut-on en conclure ?

Problème 8. Les entiers relatifs a, b étant non tous deux nuls, on note (a,b) leur PGCD. A étant un anneau commutatif unitaire, on appelle unité de A tout élément de A qui possède un inverse dans A ; les unités de A forment un groupe (multiplicatif). On rappelle que, G étant un groupe fini d'ordre m, pour tout $a \in G$ on a $a^m = e$ (où e est l'élément neutre de G).
1. a) Pour tout entier $n \geq 2$, soit $\mathbb{Z}_n$ l'anneau des entiers modulo n et U_n le groupe des unités de $\mathbb{Z}_n$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on note $[a]_n$ l'élément correspondant de $\mathbb{Z}_n$: $[a]_n = \{ a+kn \mid k \in \mathbb{Z} \}$. Montrer que l'on a : $[a]_n \in \mathrm{U}_n \Leftrightarrow (a,n) = 1$. Préciser alors les éléments de U_8 et U_9. Ces groupes sont-ils cycliques ?
b) On pose $\varphi(1) = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $\varphi(n) = \mathrm{card}\, \mathrm{U}_n$. ($\varphi$ est l'*indicateur d'Euler.*) Que valent $\varphi(8)$ et $\varphi(9)$? Que vaut $\varphi(p)$ pour p premier ? Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $a \in \mathbb{Z}$, si $(a,n) = 1$ alors $[a]_n^{\varphi(n)} = [1]_n$. En déduire que $11^{12} \equiv 1 \pmod{26}$.
2. Soit G un groupe cyclique fini d'ordre m et $a \in G$ un de ses générateurs : $G = \{ a^k | 1 \leq k \leq m\}$. Montrer que, pour tout entier $k \in [1,m]$, a^k engendre G si et seulement si $(k,m) = 1$. Exprimer à l'aide de φ le nombre de générateurs de G. Que sont les générateurs de U_9 ?

Problème 9. Étant donné une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles on dit que la série de terme général a_n converge (ou est convergente) si la suite des sommes partielles $s_n = \Sigma_{0\leq i\leq n}\, a_i$ converge.
1. a) Soit une série de terme général $a_n > 0$; montrer qu'elle converge si et seulement si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. En déduire que la série σ définie par $a_n = 2^{-(n+1)}$ si n pair, $= 2^{-(n-1)}$ sinon, converge, de même que la série τ définie par $b_{2i} = 2^{-(i+1)}$, $b_{2i+1} = 3^{-(i+1)}$, pour $i \geq 0$.
b) Montrer que, s'il existe $k \in \,]0,1[$ tel que $a_n^{1/n} \leq k$ pour n assez grand, alors la série de terme général a_n converge. Que donne ce critère sur σ et τ ?
2. On suppose qu'il existe $k \in \,]0,1[$ tel que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$ pour n assez grand. Montrer qu'il existe alors $k', k'' \in \,]0,1[$ tels que $(\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \dfrac{a_1}{a_0})^{1/n} \leq k'$ et $a_n^{1/n} \leq k''$ pour n assez grand. En déduire que la série de terme général a_n converge. Que donne ce critère sur σ et τ ?
3. Étant donné des réels $x_1, x_2, \ldots, x_m > 0$ on a $(x_1x_2\ldots x_m)^{1/m} \leq \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{m}$. Justifier le critère suivant : s'il existe $k \in \,]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{n}(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}+\ldots+\dfrac{a_1}{a_0}) \leq k$ pour n assez grand, la série de terme général a_n converge. Que donne ce critère sur σ et τ ?

Problème 10. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et d la distance associée à la norme de E. On désigne par K l'ensemble des parties compactes non vides de E. Pour tout réel $r > 0$, et pour toute partie $A \neq \varnothing$ de E, on pose $V_r(A) = \{ y \in E \,/\, \exists\, x \in A\ d(x,y) < r \}$.

1. a) Montrer que, pour tout $(A,B) \in K^2$, l'ensemble $H(A,B) = \{ r > 0 \,/\, A \subseteq V_r(B)\ \&\ B \subseteq V_r(A) \}$ est non vide. En déduire que l'application h définie par $h(A,B) = \inf H(A,B)$ est bien définie sur K^2.
b) Montrer que, pour tout $A \in K$, $h(A,A) = 0$, et que, inversement, pour tous $A, B \in K$, si $h(A,B) = 0$ alors $A = B$.
c) Soit $(A,B,C) \in K^3$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour tout $x \in A$ il existe $z \in C$ tel que $d(x,z) \leq h(A,B)+h(B,C)+2\varepsilon$. En déduire que $h(A,C) \leq h(A,B)+h(B,C)$.
d) Déduire de ce qui précède que h est une distance sur K (appelée *distance de Hausdorff*).
2. Soit $A \in K$. On rappelle que si $(F_n)_{n\geq1}$ est une suite de parties fermées de A telle que $\bigcap_{n\geq1}F_n = \varnothing$, alors il existe un entier m tel que $\bigcap_{1\leq n\leq m}F_n = \varnothing$. On considère alors une suite décroissante $(A_n)_{n\geq1}$ de compacts non vides de E : $A_1 \supseteq A_2 \ldots \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} \supseteq \ldots$ On pose $A = \bigcap_{n\geq1}A_n$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier m tel que, si $n \geq m$, alors $A_n \subseteq V_\varepsilon(A)$. En déduire que la suite $(A_n)_{n\geq1}$ converge vers A au sens de la distance de Hausdorff h.

Problème 11. 1. *a*) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{1-x}\, dx$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \le I_n \le \dfrac{e}{n!}$.

b) On pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + ... + \dfrac{1}{n!}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_n = e - u_n$.

c) Déduire de ce qui précède que l'on a : $\displaystyle\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}) = e$.

2. *Dans cette question, on démontre l'irrationalité de e.*

a) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+$. Montrer qu'il existe un entier $q > 0$ tel que, pour tout entier $k \ge q$, $[k!\alpha] = k!\alpha$.

b) Soit $k, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on a : $k!\left(\dfrac{1}{(k+1)!} + \dfrac{1}{(k+2)!} + \cdots + \dfrac{1}{(k+m)!}\right) < \dfrac{1}{k}$.

c) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, on a : $[k!e] = k!u_k < k!e$. Que peut-on en conclure ?

Problème 12. Soit $\prod$ un ensemble et $\mathbf{D}$ un ensemble de parties de $\prod$. On appelle *points* les éléments de $\prod$ et *droites* les éléments de $\mathbf{D}$. Pour tout $A \in \prod$ on pose $\mathbf{D}(A) = \{ d \in \mathbf{D} \,/\, A \in d \}$. Des points sont dits *alignés* s'ils appartiennent à une même droite. On dit que $d' \in \mathbf{D}$ *est parallèle à* $d \in \mathbf{D}$ et on note $d'//d$ si $d' = d$ ou $d' \cap d = \emptyset$. On dit enfin que $(\prod,\mathbf{D})$ est un *plan affine* si les trois axiomes suivants sont satisfaits :

A_1. Il existe trois points non alignés.

A_2. Pour tous $A, B \in \prod$, si $A \neq B$ alors $\mathbf{D}(A) \cap \mathbf{D}(B)$ contient une droite unique, notée (AB).

A_3. Pour tout $A \in \prod$ et tout $d \in \mathbf{D}$, $\mathbf{D}(A)$ contient une unique droite parallèle à d, notée $[A,d]$.

Dans ce qui suit, on suppose que $(\prod,\mathbf{D})$ est un plan affine.

1. Soit $d, d' \in \mathbf{D}$. Montrer que si d' n'est pas parallèle à d, d' et d ont un point commun et un seul.
2. Montrer que la relation « d' est parallèle à d » est une relation d'équivalence sur $\mathbf{D}$.
3. Soit $d \in \mathbf{D}$ et $A \in \prod \backslash d$. Pour tout $M \in d$ on pose $\varphi(M) = (AM)$. Montrer que φ est une bijection de d sur $\mathbf{D}(A) \backslash \{[A,d]\}$.
4. Soit $A, B \in \prod$, $A \neq B$. Pour tout $d \in \mathbf{D}(B)$ on pose $\psi(d) = [A,d]$. Montrer que ψ est une bijection de $\mathbf{D}(B)$ sur $\mathbf{D}(A)$.
5. On suppose qu'il existe une droite d contenant exactement n points. Montrer que, si $A \in \prod \backslash d$, alors $\mathbf{D}(A)$ contient exactement n+1 droites, et qu'il en est de même de $\mathbf{D}(B)$ pour tout point $B \neq A$. En déduire que toute droite contient exactement n points, et que $\prod$ contient exactement n^2 points.

Problème 13. K étant un corps (commutatif) admettant le corps des réels $\mathbb{R}$ comme sous-corps, on considère K comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ où l'addition est celle de K et la multiplication par un scalaire est la restriction à $\mathbb{R} \times K$ de la multiplication de K. On note alors $\dim_{\mathbb{R}} K$ la dimension (finie ou infinie) de l'espace vectoriel K.

1. *a*) On prend $K = \mathbb{C}$. Montrer que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. En déduire que, si $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, tout complexe s'écrit d'une manière unique sous la forme $a+b\alpha$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

b) On prend $K \subseteq \mathbb{C}$. Déduire de ce qui précède que si $K \backslash \mathbb{R} \neq \emptyset$, alors $K = \mathbb{C}$.

2. On suppose que K est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et on pose $\dim_{\mathbb{R}} K = n$.

a) Soit $\alpha \in K$. Montrer que la famille $(\alpha^i)_{0 \le i \le n}$ est liée dans l'espace vectoriel K. En déduire que $I_\alpha = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P \neq 0 \text{ et } P(\alpha) = 0\}$ est non vide, et montrer alors qu'il existe un unique polynôme $P \in I_\alpha$ qui soit unitaire et de degré minimal. Dans ce qui suit, ce polynôme, appelé *polynôme minimal* de α sur $\mathbb{R}$, est noté $M_{\alpha,\mathbb{R}}$.

b) On pose degré $M_{\alpha,\mathbb{R}} = m$. Montrer que le sous-espace vectoriel de K engendré par $\{1,\alpha,...,\alpha^{m-1}\}$ est de dimension m. En déduire que $m \le n$.

c) Que peut-on dire de α si degré $M_{\alpha,\mathbb{R}} = 1$? Si degré $M_{\alpha,\mathbb{R}} = 2$, montrer qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tels que $\beta = (\alpha - b)/c$ vérifie $\beta^2 = -1$; en déduire que $\alpha \in \mathbb{C}$.

d) Montrer que, si $\dim_{\mathbb{R}} K = 3$, alors il existe $\gamma \in K$ tel que degré $M_{\gamma,\mathbb{R}} = 3$. En observant que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 s'annule sur $\mathbb{R}$, en déduire qu'il est impossible que $\dim_{\mathbb{R}} K = 3$.

Problème 14. Soit γ une application de classe C^1 de [0,1] dans le plan complexe $\mathbb{C}$ telle que $\gamma(0) = 0$. Pour tout $t \in [0,1]$ on note L_t la longueur de l'arc de courbe $\gamma([0,t])$; on rappelle que $L_t = \displaystyle\int_0^t |\gamma'(x)|dx$.

1. On prend ici $\gamma(t) = e^{it}-1$, pour tout $t \in [0,1]$. Préciser la nature de $\gamma([0,1])$. Montrer que le rapport $L_t/|\gamma(t)|$ défini pour $t \in]0,1]$ tend vers 1 quand t tend vers 0.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère maintenant l'application γ définie par $\gamma(t) = e^{-1/t}\, e^{\alpha i/t}$ pour $t \in]0,1]$, et $\gamma(0) = 0$.

a) Montrer que γ est de classe C^1 sur $[0,1]$.

b) Montrer que, pour tout $t \in]0,1]$, $L_t = \sqrt{1+\alpha^2}\, e^{-1/t}$.

c) Montrer que le rapport $L_t/|\gamma(t)|$ défini pour $t \in]0,1]$ est constant, égal à $\sqrt{1+\alpha^2}$. Quel commentaire cela suggère-t-il ?

Problème 15. 1. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible. Montrer que, pour que $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $c = ka$ et $d = kb$.

2. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. On dit que le rationnel $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal s'il existe $n, D \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{a}{b} = \frac{D}{10^n}$. Montrer que, si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, le rationnel $\frac{a}{b}$ est décimal si, et seulement si, b s'écrit sous la forme $2^\alpha 5^\beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si b n'admet pas d'autre diviseur premier que 2 et 5.

3. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. On définit par récurrence sur n les suites $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(r_n)_{n\geq 0}$, où $q_n, r_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq 0$, par $a = bq_0+r_0$ & $r_0 < b$, $10r_0 = bq_1+r_1$ & $r_1 < b$, $10r_1 = bq_2+r_2$ & $r_2 < b$, ..., $10r_{n-1} = bq_n+r_n$ & $r_n < b$, ...
a) Montrer que les suites $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(r_n)_{n\geq 0}$ sont bien définies. Montrer en outre que, pour tout $n \geq 1$, on a $q_n < 10$. Que se passe-t-il si l'on remplace a et b par ka et kb ?
b) On suppose que $a < b$ et que l'on a $\frac{a}{b} = \frac{D}{10^n}$, où $n, D \in \mathbb{N}$. Soit $d_1d_2...d_n$ l'écriture décimale de D, de sorte que l'on a : $D = 10^{n-1}d_1 + 10^{n-2}d_2 + ... + 10d_{n-1} + d_n$. Montrer que l'on a $q_i = d_i$ pour $i = 1, 2, ..., n$, $q_i = 0$ pour $i > n$, et $r_i = 0$ pour $i \geq n$.
c) On suppose que $a < b$ et $r_n = 0$. Vérifier que l'on a alors $\frac{a}{b} = \frac{D}{10^n}$, où $D = 10^{n-1}q_1+10^{n-2}q_2+...+10q_{n-1}+q_n$.

Problème 16. Soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres premiers : $\mathbf{P} = \{2,3,5,7,11,\ldots\}$.Pour toute partie non vide X de $\mathbf{P}$, on note $\overline{X}$ l'ensemble des produits d'éléments de X : si $p, q, r\ldots \in$ X et $\alpha, \beta, \gamma\ldots \in \mathbb{N}$, alors $p^\alpha q^\beta r^\gamma\ldots \in \overline{X}$. (En prenant p quelconque dans $\mathbf{P}$ et $\alpha = 0$, on a en particulier : $1 = p^0 \in \overline{X}$.) On pose $\mathbf{A}(X) = \{ \frac{n}{m} / n \in \mathbb{Z}\ \&\ m \in \overline{X} \}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est strictement inclus dans $\mathbf{A}$(X) et que $\mathbf{A}$(X) est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{Q}$. Préciser $\mathbf{A}(\mathbf{P})$.

2. a) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ avec $(a,b) = (c,d) = 1$. Montrer que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a = c$ et $b = d$.

b) Soit X et Y des parties non vides de $\mathbf{P}$. Montrer que si $X\cap Y = \varnothing$ alors $\mathbf{A}(X) \cap \mathbf{A}(Y) = \mathbb{Z}$.

c) Un élève écrit (erronément) : $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{7-5}{5\times 7} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Pourquoi l'égalité ainsi obtenue est-elle *a priori* impossible ?

3. a) Soit $X = \{p_1,p_2,\ldots,p_\ell\} \subset \mathbf{P}$. On pose $q = p_1p_2\ldots p_\ell$. Montrer que $\mathbf{A}(X) = \{ \frac{n}{q^k} / n \in \mathbb{Z}\ \&\ k \in \mathbb{N} \}$.

b) Soit $\mathbb{D} = \{ \frac{n}{10^k} / n \in \mathbb{Z}\ \&\ k \in \mathbb{N} \}$ l'anneau des nombres décimaux, et soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $(a,b) = 1$. Montrer que le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est décimal si et seulement si b est de la forme $2^\alpha 5^\beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Problème 17. I. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on appelle valeur approchée par défaut à ε près de x le nombre $k\varepsilon$, où $k \in \mathbb{N}$ vérifie : $k\varepsilon \leq x < (k+1)\varepsilon$. Montrer que k est la partie entière du réel $\frac{x}{\varepsilon}$. À l'aide d'une calculatrice, déterminer la valeur approchée par défaut de π à $\frac{1}{113}$ près.

II. 1. Soit a un entier ≥ 2, et soit $x \in [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\frac{k_n}{a^n}$ la valeur approchée de x à a^{-n} près par défaut. Montrer que la suite $\left(\frac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq 1}$ est croissante et converge vers x.

2. a) Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. On pose $u_1 = s_1$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = s_{n+1} - s_n$. Vérifier que $(s_n)_{n\geq 1}$ est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n ($n \geq 1$).
b) On pose $\lambda_1 = k_1$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $\lambda_{n+1} = k_{n+1} - ak_n$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\lambda_n \in \mathbb{N} \cap [0;a-1]$, et vérifier que la série de terme général $\frac{\lambda_n}{a^n}$ ($n \geq 1$) converge vers x : $\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{a^n} = x$. En déduire que les λ_n ne peuvent pas être tous égaux à $a-1$ à partir d'un certain rang. (L'entier λ_n est appelé le n–ième chiffre du développement du réel x dans la base a.)

3. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers $\mu_n \in \mathbb{N} \cap [0;a-1]$, non tous égaux à $a-1$ à partir d'un certain rang. Montrer que la série de terme général $\frac{\mu_n}{a^n}$ ($n \geq 1$) converge vers un réel $y \in [0;1[$, et que, si $y = x$, alors $\mu_n = \lambda_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

4. On prend ici $a = 10$. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $[0;1[$ et, pour tout entier $n \geq 1$, soit un entier $\mu_n \in \mathbb{N} \cap [1;8]$ différent du n–ième chiffre du développement de $f(n)$ en base 10. On pose $y = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu_n}{a^n}$. Montrer que $y \notin f(\mathbb{N})$. Que peut-on en conclure ?

Problème 18. 1. Soit une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$ et une application f strictement décroissante et continue de $[1;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(n) = a_n$ pour tout entier $n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $b_n = s_n - \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$, $c_n = s_n - \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < b_n < c_n$. Vérifier que les suites $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ sont, respectivement, strictement croissante et strictement décroissante, et que $\lim_{n\to+\infty}(c_n - b_n) = 0$. En déduire qu'il existe un réel γ_f unique tel que $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \gamma_f$.
2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\gamma_f + \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x < s_n < \gamma_f + \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$. En déduire qu'on a l'équivalence : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

b) On suppose que $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$ et on pose $s = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < s - s_n < \int_n^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

3. On prend ici $a_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$, et on note γ la limite γ_f (γ est la *constante d'Euler*).

a) Vérifier que l'on a alors : $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) < \gamma < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = c_n$. Montrer que $c_n - b_n \sim \frac{1}{n}$.

b) On pose $\alpha_1 = b_1$, $\alpha_n = b_n - b_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, enfin $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x})$ pour $x \geq 1$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n = \varphi(n)$ et $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = b_n$. En déduire l'encadrement $b_n + \int_{n+1}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x < \gamma < b_n + \int_n^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) On pose $u_n = b_n + \int_{n+1}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ et $v_n = b_n + \int_n^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi(x) = -(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$ pour $x \geq 1$. Vérifier que $\Phi'(x) = \varphi(x)$ pour $x \geq 1$. En déduire que $v_n - u_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

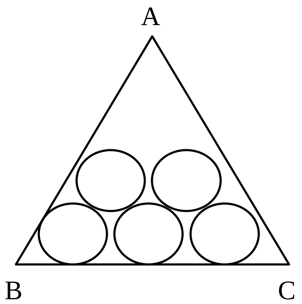
Problème 19. Les exercices du type suivant étaient classiques autrefois au brevet (fin de 3e) : *Sachant que l'on a* $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, *calculer le meilleur encadrement que l'on peut en déduire pour* $f(\sqrt{3}-2)$, *où* $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.

1. Vérifier que $f(\sqrt{3}-2) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et en déduire l'encadrement $0{,}3660 < f(\sqrt{3}-2) < 0{,}3665$.

2. On pose $\mathrm{I} =]1{,}732;1{,}733[$. Soit $\alpha \in \mathrm{I}$. On considère les applications f_1, f_2, f_3 de I dans $\mathbb{R}$ définies par : $f_1(x) = \frac{2x-3}{3-x}$; $f_2(x) = \frac{x-1}{2}$; $f_3(x) = \frac{1}{1+x}$. Pour $i = 1, 2, 3$, exprimer par un encadrement le fait que $f_i(\alpha) \in f_i(\mathrm{I})$.

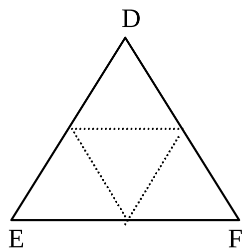
3. On prend ici $\alpha = \sqrt{3}$ et on pose $a = f_1(\alpha)$. Vérifier que l'on a $f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = a$. À l'aide éventuellement d'une calculette, indiquer le meilleur minorant et le meilleur majorant de a fourni par les encadrements obtenus dans la question précédente.
4. Pour tout $\lambda \in [0;1]$, on considère l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_\lambda(x) = \lambda f_2(x)+(1-\lambda)f_3(x)$. Vérifier que, pour tout $\lambda \in [0;1]$, on a $\varphi_\lambda(\alpha) = a$. Montrer qu'il existe des réels λ^-, λ^+ vérifiant $0 < \lambda^- < \lambda^+ < 1$ tels que si $\lambda \in [0;\lambda^-]$ alors φ_λ est strictement décroissante sur I, et si $\lambda \in [\lambda^+;1]$ alors φ_λ est strictement croissante sur I. Préciser la variation de φ_λ sur I pour $\lambda \in]\lambda^-;\lambda^+[$.
5. On prend ici $\lambda = 0{,}212$. Préciser $\varphi_\lambda(\text{I})$. En déduire un encadrement de a meilleur que ceux obtenus précédemment.
6. Soit $\lambda \in [\lambda^+;1]$. Donner l'expression de l'amplitude $\omega(\lambda)$ de l'intervalle $\varphi_\lambda(\text{I})$. En déduire que ω est minimal sur $[\lambda^+;1]$ pour $\lambda = \lambda^+$. Vérifier, à l'aide d'une calculette, que $\omega(\lambda^+) < 4\cdot 10^{-8}$.

Problème 20. On dit qu'un point est contenu dans un triangle ABC s'il est intérieur à ABC ou appartient à l'un de ses côtés ; on dit de même qu'un ensemble de points est contenu dans ABC s'il en est ainsi de chacun des éléments de cet ensemble. La figure ci-après représente un triangle équilatéral ABC contenant 5 disques Δ_i $(1 \le i \le 5)$ de diamètre 1, avec $\text{aire}(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0$ si $j \neq i$. Dans ce qui suit on cherche à déterminer le minimum du côté d'un tel triangle.



1. Par des considérations d'aire, montrer que, si ABC est un triangle équilatéral convenable, on a AB = BC = CA > 3. Soit h la distance du centre O de ABC à chacun de ses côtés. Montrer que $h > 0{,}8$.

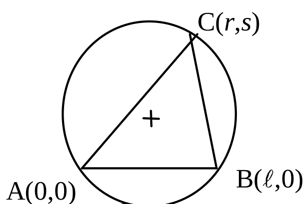
2. On suppose désormais la condition précédente satisfaite. Soit A'B'C' le triangle contenu dans ABC tel que, respectivement, les droites (A'B') et (AB), (B'C') et (BC), (CA) et (C'A') sont parallèles et à distance 0,5 l'une de l'autre.
a) Montrer que le triangle A'B'C' est équilatéral.
b) Montrer qu'un disque Δ de diamètre 1 est contenu dans le triangle ABC si et seulement si son centre ω est contenu dans le triangle A'B'C'.



3. Soit DEF un triangle équilatéral (voir la figure ci-contre).
a) On suppose que l'on a DE = EF = FD = 2. Montrer que le triangle DEF contient 5 points ω_i $(1 \le i \le 5)$ tels que $\omega_i\omega_j \ge 1$ pour tous $j \neq i$, $1 \le i, j \le 5$.
b) On suppose que DE = EF = FD < 2. Montrer que le triangle DEF ne vérifie pas la condition précédente.

4. Déduire de ce qui précède la taille minimale d'un triangle équilatéral convenable.

Problème 21. Le but de l'étude est d'établir le résultat bien connu selon lequel le centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC est sur le côté (AB) si et seulement si le triangle est rectangle en C.



1. Étant donné trois points A, B, C non alignés, soit un repère orthonormal du plan tel que A et B aient pour coordonnées, respectivement, $(0,0)$ et $(\ell,0)$. Soit alors (r,s) et (U,V) les coordonnées respectives de C et O. Enfin soit H un nombre réel.
a) Inter nétriquement la conjonction d'égalités suivante : $(r-U)^2+(s-V)^2 = U^2+V^2$ & $(\ell-U)^2+V^2 = U^2+V^2$ & $\ell sH = 1$ & $V = 0$.
b) En éliminant les paramètres H, U, V, montrer algébriquement que l'on a l'implication : $(r-U)^2+(s-V)^2 = U^2+V^2$ & $(\ell-U)^2+V^2 = U^2+V^2$ & $\ell sH = 1$ & $V = 0 \Rightarrow \ell r - r^2 - s^2 = 0$.
c) Déduire de ce qui précède que, si O est sur (AB), alors le triangle ABC est rectangle en C.
2. Vérifier l'égalité :

$$-2V = H\ell\,[(r-U)^2+(s-V)^2-(U^2+V^2)] - Hr\,[(\ell-U)^2+V^2-(U^2+V^2)] + 2V\,[\ell sH-1] + H\ell\,[\ell r - r^2 - s^2].$$

En déduire que, si le triangle ABC est rectangle en C, alors O est sur (AB).

Problème 22. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $t \in \mathbb{R}$ est une période de f si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x+t) = f(x)$. On désigne par $G(f)$ l'ensemble des périodes de f. On dit que f est périodique si f admet au moins une période non nulle.

1. Montrer que $G(f)$ est un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$. Préciser $G(f)$ lorsque f est constante sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose f périodique. Soit alors $\tau = \inf G(f) \cap \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que $\tau \in G(f)$.

b) On suppose $\tau > 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$, et soit $n \in \mathbb{Z}$ l'unique entier tel que $n\tau \leq t < (n+1)\tau$. Montrer que, si $t \in G(f)$, alors $n\tau = t$. En déduire que $G(f) = n\mathbb{Z}$. (Le nombre τ est appelé *la plus petite période de* f.)

c) On suppose f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que, si $\tau = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

d) On prend pour f la fonction de Dirichlet : $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $= 0$ sinon. Préciser τ et $G(f)$.

Problème 23. Soit F l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On considère l'ensemble S des éléments de F de la forme $x \mapsto a \cos 2x + b \cos^2 x + c \sin^2 x + d$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de F.
2. Préciser la dimension de S et en donner une base.
3. Montrer que S ne peut pas être l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre, de la forme $y'' + \lambda y' + \mu y = 0$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Problème 24. Soit un polynôme $P(X) = c_0X^n + c_1X^{n-1} + \ldots + c_{n-1}X + c_n$, où $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{Z}$, et soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

1. Vérifier que l'on a : $q^n P(p/q) = c_0p^n + c_1qp^{n-1} + \ldots + c_{n-1}q^{n-1}p + c_nq^n$. En déduire que, si on a $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, alors p divise c_n et q divise c_0.

2. On prend $P(X) = 2X^3 - 5$.

a) À l'aide du résultat de la question 1, montrer que P n'a pas de racine rationnelle strictement positive.

b) Soit $\alpha = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$. Vérifier que $P(\alpha) = 0$. Déduire de ce qui précède que α est irrationnel.

3. On prend $P(X) = X^3 - 3X - 1$.

a) Montrer que P n'a pas de racine rationnelle strictement positive.

b) Soit $\alpha = \cos\frac{\pi}{9}$. Montrer que $P(2\alpha) = 0$. En déduire que $\cos\frac{\pi}{9}$ est irrationnel.

Problème 25. L'objet de l'étude est de démontrer l'équipotence de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application de $I =]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \tan \pi\,(t - \frac{1}{2})$ est une bijection de I sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par J l'ensemble des nombres irrationnels de I : $J = I \backslash (I \cap \mathbb{Q})$.

a) Soit α un nombre irrationnel tel que $1 < \alpha < 2$; montrer que l'on a : $I \cap \mathbb{Q} + \alpha \subset 3J$. En déduire une injection de $I = J \cup (I \cap \mathbb{Q})$ dans 3J.

b) On rappelle le théorème de Schröder-Bernstein : étant donné deux ensembles E et F, si E est équipotent à une partie de F, et si F est équipotent à une partie de E, alors E et F sont équipotents. Déduire de ce qui précède que I et J sont équipotents.

3. Soit $x \in J$. On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers ≥ 1 en posant $\frac{1}{x} = a_1 + x_1$, avec $x_1 \in J$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{x_n} = a_{n+1} + x_{n+1}$, avec $x_{n+1} \in J$. Montrer que la suite $s(x) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

4. On *admet* ici que l'application $x \mapsto s(x)$ de J dans l'ensemble $S = (\mathbb{N}^*)^{(\mathbb{N}^*)}$ des suites d'entiers est une *bijection* de J sur S. Définir une bijection de $S\times S$ sur S. En déduire l'équipotence de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Problème 26. L'étude ci-après a pour objet de mathématiser l'idée intuitive selon laquelle « une tangente à une courbe en un point M_0 est la limite de la corde (M_0M) lorsque M tend vers M_0 en restant sur la courbe ».

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit $\tau \in I$.

1. On note L l'ensemble des applications $u : t \mapsto u(t)$ de $I\backslash\{\tau\}$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ telles que $\ell(u) = \lim_{t\to\tau, t\neq\tau} u(t)$ existe et soit non nul. Soit alors $u_1, u_2 \in L$ telles que, pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on a $\mathbb{R}u_1 = \mathbb{R}u_2$. Montrer qu'il existe une

application φ de $I\backslash\{\tau\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on a $u_1(t) = \varphi(t)u_2(t)$, et que φ a une limite quand t tend vers τ, $t \neq \tau$. En déduire que $\mathbb{R}\ell(u_1) = \mathbb{R}\ell(u_2)$.

2. Soit $\delta : t \mapsto \delta(t)$ une application de $I\backslash\{\tau\}$ dans l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. On dit que δ a pour limite la droite vectorielle Δ quand t tend vers τ, $t \neq \tau$ s'il existe $u \in L$ telle que, pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, $\mathbb{R}u(t) = \delta(t)$, avec $\mathbb{R}\ell(u) = \Delta$ Justifier cette définition.

3. Soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ une application injective de I dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on pose $\delta(t) = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma(\tau)\gamma(t)}$. Si Δ existe, on dit que $\gamma(I)$ a pour tangente en $\gamma(\tau)$ la droite affine $\gamma(\tau)+\Delta$.

a) Montrer que si γ est dérivable en τ et si $\gamma'(\tau) \neq 0$, alors $\gamma(I)$ a pour tangente en $\gamma(\tau)$ la droite affine $\gamma(\tau)+\mathbb{R}\gamma'(\tau)$.

b) On suppose que $\gamma(t) = (t,f(t))$, où f est une application de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\gamma(I)$ a une tangente en $\gamma(\tau)$ si et seulement si f admet en τ une dérivée finie ou infinie.

Problème 27. Soit $I = [a;b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$.

1. On considère une relation d'équivalence $\sim$ sur I vérifiant la condition C suivante :

$$\text{pour tout } x \in I, \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que, pour tout } y \in I, \text{ si } |x-y| < \varepsilon, \text{ alors } x \sim y.$$

On démontre dans cette question que l'on a alors $a \sim b$ (lemme de Moss et Roberts, 1968).

a) On pose $Z = \{ z \in I \,/\, a \sim z \}$. Montrer que l'ensemble Z est non vide et majoré.
b) On pose $w = \sup Z$. Montrer que $w \in Z$, puis que $w = b$.

2. Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in I$, on note $[x;y]$ l'intervalle compact d'extrémités x et y.

a) On considère la relation $\sim$ définie sur I par : $x \sim y \Leftrightarrow f$ est bornée sur $[x;y]$. Déduire du résultat de la question 1 que f est bornée sur I.
b) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) < M$. Soit alors $\sim$ la relation définie sur I par : $x \sim y \Leftrightarrow \sup f([x;y]) < M$. Montrer qu'il existe $u \in I$ tel que $f(u) = \sup f(I)$. En déduire qu'il existe $v \in I$ tel que $f(v) = \inf f(I)$.
c) Soit $J = [x_1;x_2] \subset I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) < \alpha < f(x_2)$. Soit alors $\sim$ la relation définie sur J par : $x \sim y \Leftrightarrow (f(x)-\alpha)(f(y)-\alpha) > 0$. Montrer que si, pour tout $x \in \,]x_1;x_2[$, on a $f(x) \neq \alpha$, alors la relation $\sim$ vérifie la condition C sur J. En déduire qu'il existe $x \in \,]x_1;x_2[$ tel que $f(x) = \alpha$.

Problème 28. Soit $\alpha \in \,]1;2]$. On veut calculer $a = \sqrt{\alpha}$ à l'aide de l'algorithme défini par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{\alpha}{x})$.

1. a) Montrer que, pour tout réel $x \in [1;+\infty[$, on a $f(x) \geq a$, et, pour tout réel $x \in [a;+\infty[$, on a $f(x) \leq x$. En déduire que $x_n \geq a$ pour tout entier $n \geq 1$ et que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
b) Montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ tend vers a quand n tend vers $+\infty$.

2. On pose $\delta_n = \frac{x_n - a}{2a}$.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a : $\delta_{n+1} = \frac{a}{x_n}\delta_n^2$. En déduire que $\delta_2 = \frac{(a-1)^4}{8a(a^2+1)}$ et que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\delta_{n+1} \leq \delta_n^2$.
b) Pour tout réel $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \frac{x^4}{(x+1)[(x+1)^2+1]}$, de sorte que l'on a : $8\delta_2 = \varphi(a-1)$. Montrer que $\varphi(x) = \frac{1}{x^{-1}+3x^{-2}+4x^{-3}+2x^{-4}}$. En déduire que φ est croissante sur $]0;+\infty[$ puis que l'on a : $\delta_2 \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^4}{24\sqrt{2}} < 10^{-3}$.
c) Déduire de ce qui précède que $x_n - a < 2a\cdot 10^{-3\cdot 2^{n-2}}$ pour tout entier $n \geq 2$, et, en particulier, que $x_5 - a < 3\cdot 10^{-24}$.

Problème 29. Soit d une distance sur $\mathbb{R}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et soit $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. On cherche à déterminer le ou les réels $\overline{x}$ tels que la distance $d(X,\overline{X})$ soit *minimale*, où $\overline{X} = (\overline{x},\overline{x},\ldots,\overline{x}) \in \mathbb{R}^n$. S'ils existent, les réels $\overline{x}$ seront appelés les d-moyennes de $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Dans ce qui suit, on considère successivement la distance euclidienne

$d_2((x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}$ et la distance des valeurs absolues $d_1((x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|$.

1. On prend pour d la distance d_2 : on a donc $d_2(X,\overline{X}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\overline{x})^2}$. En observant que le carré de l'application $\delta_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\delta_2(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-t)^2}$ est une fonction polynomiale de degré 2 en t, montrer qu'il existe une unique d_2-moyenne $\overline{x}$ et que l'on a $\overline{x} = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$. (La d_2-moyenne de $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est donc la *moyenne arithmétique* de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.)

2. On suppose que les valeurs x_i ($1 \le i \le n$) sont rangées par ordre croissant (au sens large) : $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. On prend pour d la distance d_1 : on a donc $d_1(X,\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-\overline{x}|$.

a) Soit une application $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; on rappelle que δ est *strictement décroissante sur* $[x;y]$, où $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \le y$, si elle vérifie la condition suivante : $\forall t \forall t'(x \le t < t' \le y \Rightarrow \delta(t) > \delta(t'))$. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$, avec $x \le y \le z$; montrer que, si δ est strictement décroissante sur $[x;y]$ et sur $[y;z]$, alors δ est strictement décroissante sur $[x;z]$. (On pourra distinguer trois cas : $x < y < z$; $x = y < z$ ou $x < y = z$; $x = y = z$.)

b) Soit $\delta_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\delta_1(t) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-t|$, et soit un entier k, $1 \le k < n$, tel que $x_k < x_{k+1}$. Vérifier que, sur l'intervalle $[x_k;x_{k+1}]$, δ_1 est une fonction affine, dont on précisera le sens de variation en fonction de k.

c) Déduire de ce qui précède que, lorsque n est impair, δ_1 est minimal sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $t = x_m$, où $m = \dfrac{n+1}{2}$. (La d_1-moyenne de $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est appelée la *médiane* de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.)

d) Que peut-on dire à propos du minimum de δ_1 sur $\mathbb{R}$ lorsque n est pair ?

Problème 30. Soit f une application continue de $I = [0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Dans ce qui suit, on démontre que la suite de fonctions polynomiales $(B(f)_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $B(f)_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ converge uniformément vers f sur I (démonstration du théorème de Weierstrass due à S.N. Bernstein). Soit $\varepsilon > 0$; f étant continue sur le compact I est uniformément continue sur I et il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour tous $x', x'' \in I$, si $|x'-x''| < \delta$, alors $|f(x')- f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On pose en outre $M = \sup_{x\in I} |f(x)|$.

1. Vérifier que, pour tout $x \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(x)- B(f)_n(x) = \Sigma^+ + \Sigma^-$, où

$$\Sigma^+ = \sum_{k\in K^+} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \text{ et } \Sigma^- = \sum_{k\in K^-} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

avec $K^+ = \{ k \in \mathbb{N} / 0 \le k \le n \wedge \left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta \}$, $K^- = \{ k \in \mathbb{N} / 0 \le k \le n \wedge \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta \}$. Montrer que $|\Sigma^-| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$.

2. Soit $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le n$, $P(X_i = 1) = x$ et $P(X_i = 0) = 1-x$. ($X_1, \ldots, X_n$ sont donc des variables de Bernoulli.) On pose $\overline{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. On rappelle que $E(\overline{X}) = x$ et $Var(\overline{X}) = \dfrac{x(1-x)}{n}$.

a) Montrer que $P(|\overline{X}-x| \ge \delta) = \displaystyle\sum_{k\in K^+} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}$.

b) On rappelle que $P(|\overline{X}-E(\overline{X})| \geq \delta) \leq \dfrac{\mathrm{Var}(\overline{X})}{\delta^2}$ (inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Montrer que, pour n assez grand, on a $|\Sigma^+| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. En déduire que la suite $(B(f)_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur I.

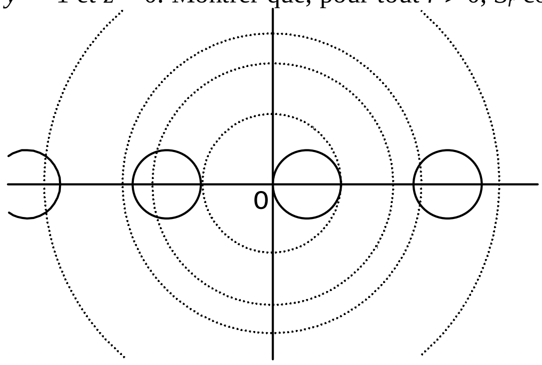
Problème 31. 1. Dans cette question, on considère l'assertion $A^{(2)}$ suivante : « Dans le plan $\mathbb{R}^2$, il existe une famille $\mathcal{C} = (C_i)_{i\in I}$ de cercles C_i de rayon *non nul* qui forme une partition du plan, c'est-à-dire telle que, pour tous $i, j \in I$, $i \neq j$, $C_i \cap C_j = \varnothing$, et $\bigcup\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} C_i = \mathbb{R}^2$. » Pour tout cercle C du plan, on note $\overline{C}$ le disque fermé de bord C.

a) Soit $C_i \in \mathcal{C}$ un cercle de la famille de rayon $r_i > 0$. Montrer qu'il existe un cercle $C_j \in \mathcal{C}$ de rayon $r_j < \dfrac{r_i}{2}$ tel que $\overline{C_j} \subset \overline{C_i}$.

b) En déduire qu'il existe un point intérieur à $\overline{C_i}$ par lequel ne passe aucun cercle de la famille $\mathcal{C}$. Que peut-on en conclure ?

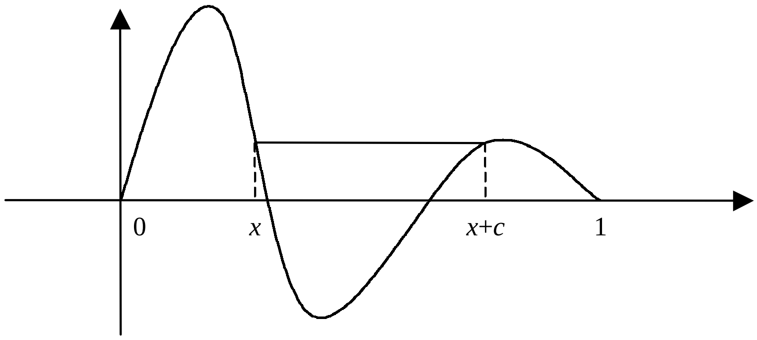
2. On considère maintenant l'assertion $A^{(3)}$ suivante : « Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, il existe une famille $\mathcal{C} = (C_i)_{i\in I}$ de cercles C_i de rayon *non nul* qui forme une partition de l'espace $\mathbb{R}^3$. »

a) Pour tout réel $r > 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, soit S_r la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = r^2$ et C_k le cercle d'équations $(x-4k-1)^2+y^2 = 1$ et $z = 0$. Montrer que, pour tout $r > 0$, S_r coupe $C = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} C_k$ en deux points distincts A_r et B_r (voir la figure ci-contre).



b) Soit P_r le plan médiateur du segment $[A_rB_r]$ et soit Γ_r le grand cercle intersection de P_r et S_r. On désigne par $S_r(A_r)$ (respectivement, $S_r(B_r)$) l'hémisphère ouvert déterminé par Γ_r et contenant le point A_r (resp. B_r). En considérant des plans sécants convenables, montrer que $S_r(A_r)\setminus\{A_r\}$et $S_r(B_r)\setminus\{B_r\}$ sont des réunions de cercles disjoints. Que peut-on conclure à propos de $A^{(3)}$?

Problème 32. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications continues f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.



On dit que le réel $c \in\ ]0,1]$ est une corde de $f \in \mathcal{F}$ s'il existe $x \in [0,1-c]$ tel que $f(x) = f(x+c)$ (voir la figure). On dit que $c \in\ ]0,1]$ est une corde universelle s'il est une corde de f pour toute $f \in \mathcal{F}$.

1. Montrer que $c = 1$ est une corde universelle.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on considère la suite finie des nombres $d_k = f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, où $k = 0, 1, \ldots, n-1$. En observant que $\sum_{0\leq k<n} d_k = 0$, montrer que l'application $x \mapsto f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$ s'annule en un point au moins de l'intervalle $\left[0, \dfrac{n-1}{n}\right]$. Que peut-on dire alors de $c = \dfrac{1}{n}$?

3. Soit un réel $c \in\ ]0,1]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $c \neq \dfrac{1}{n}$. Dans cette question, on démontre que c n'est pas une corde universelle.

a) Montrer qu'il existe une application continue φ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et, pour tout $x \in [0,1-c]$, $\varphi(x+c) = \varphi(x)$.

b) Déduire de ce qui précède qu'il existe une application $f \in \mathcal{F}$ telle que, pour tout $x \in [0,1-c]$, $f(x+c) \neq f(x)$. Que peut-on dire alors de c ?

Problème 33. Dans ce qui suit, on démontre que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable (Cantor, 1873). Pour cela, on suppose au contraire qu'il existe une bijection $n \mapsto a_n$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$, en vue de montrer qu'il en résulte une contradiction.

1. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes : $p_0 = 0$; p_1 est le plus petit des entiers n tels que $a_n > a_0$; pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_{p_{2m-2}} < a_{p_{2m}} < a_{p_{2m+1}} < a_{p_{2m-1}}$.

2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant les conditions ci-dessus. Montrer que $\bigcap_{m\geq 0}]a_{p_{2m}}, a_{p_{2m+1}}[\neq \emptyset$.

3. Soit $y \in \bigcap_{m\geq 0}]a_{p_{2m}}, a_{p_{2m+1}}[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y \neq a_n$. Que peut-on en conclure ?

4. Où la démonstration précédente échoue-t-elle si on y remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$?

Problème 34. On définit par les quatre conditions ci-dessous une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'ensembles finis de couples d'entiers positifs $(p, q) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, chaque ensemble R_n étant muni d'un ordre strict noté $\prec_n$:

1) $R_1 = \{(1, 1)\}$;
2) Pour $n \geq 1$, si $(p, q) \in R_n$, alors $(p, p+q) \in R_{n+1}$ et $(p+q, q) \in R_{n+1}$ et $(p, p+q) \prec_{n+1} (p+q, q)$;
3) Pour $n \geq 1$, si $(p, q) \prec_n (p', q')$ alors $(p+q, q) \prec_{n+1} (p', p'+q')$
4) Pour $n \geq 1$, si $(p, q) \in R_{n+1}$, alors $(p, q-p) \in R_n$ ou $(p-q, q) \in R_n$

On obtient ainsi :

R_1 :	$(1, 1)$
R_2 :	$(1, 2) \prec_2 (2, 1)$
R_3 :	$(1, 3) \prec_3 (3, 2) \prec_3 (2, 3) \prec_3 (3, 1)$
R_4 :	$(1, 4) \prec_4 (4, 3) \prec_4 (3, 5) \prec_4 (5, 2) \prec_4 (2, 5) \prec_4 (5, 3) \prec_4 (3, 4) \prec_4 (4, 1)$
R_5 :	$(1, 5) \prec_5 (5, 4) \prec_5 (4, 7) \prec_5 (7, 3) \prec_5 (3, 8) \prec_5 (8, 5) \prec_5 (5, 7) \prec_5 (7, 2) \prec_5 (2, 7) \prec_5 (7, 5)$ …

Soit alors la suite $s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ obtenue en énumérant successivement les ensembles ordonnés R_n ($n \in \mathbb{N}^*$) : (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 2), (2, 5), (5, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 4), (4, 7), (7, 3), (3, 8), (8, 5), (5, 7), (7, 2), (2, 7), (7, 5), (5, 8), (8, 3), (3, 7), (7, 4), (4, 5), (5, 1), …

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ les résultats suivants :

a) quel que soit le couple (p, q) apparaissant dans la suite s, les entiers p et q sont premiers entre eux ;

b) tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ où p et q sont premiers entre eux apparaît au moins une fois dans la suite s ;

c) tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ où p et q sont premiers entre eux apparaît au plus une fois dans la suite s

2. Montrer qu'il existe une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $s_k = (f(k-1), f(k))$. Que peut-on dire de la suite de rationnels $\left(\dfrac{f(k-1)}{f(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$?

Problème 35. On note O le point (0,0) de $\mathbb{R}^2$. Dans ce qui suit, on étudie (sans le résoudre complètement) le *problème de Fermat* : étant donné trois points A, B, C non alignés de $\mathbb{R}^2$, déterminer le ou les points P de $\mathbb{R}^2$, s'il en existe, où la somme des distances PA+PB+PC est *minimale*.

1. a) Étant donné une droite d et un point $M \notin d$, on note $d^{(M)}$ le demi-plan de bord d qui contient M, et $d_{(M)}$ l'autre demi-plan de bord d privé de d. Soit trois points non alignés A, B, C de $\mathbb{R}^2$. On appelle plaque ABC, et on note ABC, l'intersection des demi-plans $(AB)^{(C)}$, $(BC)^{(A)}$ et $(CA)^{(B)}$. En admettant que $ABC = \bigcup_{H\in[BC]} [AH]$, montrer que l'on a : $ABC = \{ M \in \mathbb{R}^2 \,/\, \exists (\lambda,\mu) \in [0,1]^2$ tel que $\lambda+\mu \leq 1$ et $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AB}+\mu\,\overrightarrow{AC} \}$.

b) Déduire de ce qui précède que ABC est un compact de $\mathbb{R}^2$ pour la topologie de la norme euclidienne.

2. Soit $M \in (BC)_{(A)}\cap(CA)^{(B)}\cap(AB)^{(C)}$. Montrer que]AM[coupe [BC] en un point H tel que MA+MB+MC > HA+HB+HC. En déduire que l'application $f : M \mapsto MA+MB+MC$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ a un minimum, qu'elle atteint en un point au moins de la plaque ABC.

3. a) On suppose ici que le projeté orthogonal H de A sur la droite (BC) appartient à]BC[. Pour tout $P \in [AH]$ on pose $x = HP$. Montrer que, φ étant l'application de $[0,AH]$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(x) = PA+PB+PC$, on a $\varphi'(0) = -1$. En déduire que f ne peut pas atteindre son minimum en H.

b) On se situe à nouveau dans le cas général. Montrer que f ne peut pas atteindre son minimum en un point de $]AB[\cup]BC[\cup]CA[$.

Problème 36. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit f une application *croissante* de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, en tout point $x \in I$, f possède une limite à gauche $f(x_-)$ et une limite à droite $f(x_+)$.

2. Soit $a, b \in I$, avec $a < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $D_n(a, b) = \{ x \in]a, b[\ / \ f(x_+)-f(x_-) > \frac{1}{n} \}$. Montrer que $D_n(a, b)$ est un ensemble fini.

3. a) Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles finis ou dénombrables. Montrer qu'on peut énumérer l'ensemble $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$ (c'est-à-dire définir une bijection d'une partie de $\mathbb{N}^*$ sur E).

b) Soit $a, b \in I$, avec $a < b$. On pose $D(a, b) = \{ x \in]a, b[\ / \ f(x_+) \neq f(x_-) \}$. Déduire de ce qui précède que $D(a, b)$ est fini ou dénombrable.

c) On pose $D_f = \{ x \in I \ / \ f(x_+) \neq f(x_-) \}$. Est-il vrai que D_f est fini ou dénombrable ?

Problème 37. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté, et soit f une application de $\mathcal{P}$ dans lui-même. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ on note M' le point image de M par f : $M' = f(M)$. On dit que l'application f conserve l'aire si, pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$, on a : $a(ABC) = a(A'B'C')$, où a désigne l'aire arithmétique.

I. On suppose que f conserve l'aire.

1. Montrer que f est injective.

2. Montrer que, pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$, les points A, B, C sont alignés si et seulement si il en est de même de A', B', C'.

3. Montrer que, pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$, si $C \in]AB[$ alors $C' \in]A'B'[$.

4. Montrer que, pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $C = \lambda A+(1-\lambda)B$, alors $C' = \lambda A'+(1-\lambda)B'$. En déduire que f est une bijection affine de $\mathcal{P}$ sur lui-même.

II. On rappelle que, u étant une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$ on a : $a(A'B'C') = |\det u|\cdot a(ABC)$, où $\det u$ est le déterminant de u. Montrer que f conserve l'aire si et seulement si f est affine et vérifie : $\det f = \pm 1$.

III. Soit (O, I, J) un repère orthonormal direct de $\mathcal{P}$, et soit $K \in \mathcal{P}$, $K \neq J$, tel que (JK) soit parallèle à (OI).

1. Montrer qu'il existe une unique application affine u telle que $u(M) = M$ pour tout $M \in (OI)$ et $u(J) = K$. Donner l'expression analytique de u dans le repère (O, I, J) et vérifier que u conserve l'aire.

2. Préciser et justifier un procédé de construction de $M' = u(M)$ pour $M \notin (OI)$, $M \neq J$.

Problème 38. I. On rappelle les deux résultats suivants :

$\mathfrak{R}_1$ (*Récurrence ascendante infinie*). Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$. Si $0 \in \mathcal{P}$ et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathcal{P}$ implique $k+1 \in \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P} = \mathbb{N}$.

$\mathfrak{R}_2$ (*Récurrence descendante*). Soit $\mathcal{P} \subset [0, n]\cap\mathbb{N}$. Si $n \in \mathcal{P}$ et si, pour tout $k \in]0, n]\cap\mathbb{N}$, $k \in \mathcal{P}$ implique $k-1 \in \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P} = [0, n]\cap\mathbb{N}$.

On considère alors l'énoncé suivant :

$\mathfrak{R}_C$ (*Récurrence de Cauchy*). Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ avec $0 \in \mathcal{P}$. On suppose en outre que

- pour tout $k \in \mathcal{P}$, il existe un entier $n(k) \in \mathcal{P}$ tel que $n(k) > k$;

• pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si $k \in \mathcal{P}$, alors $k-1 \in \mathcal{P}$.

Alors $\mathcal{P} = \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathfrak{R}_C$ implique $\mathfrak{R}_1$.

2. Montrer que $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ impliquent $\mathfrak{R}_C$. (On pourra considérer la suite $(n^i(0))_{i\in\mathbb{N}}$ définie par $n^0(0) = 0$ et $n^i(0) = n(n^{i-1}(0))$ pour $i > 0$.)

II. 1. Soit x_1, x_2, y_1, y_2 des nombres réels. Montrer que l'on a : $(x_1y_1+x_2y_2)^2 + (x_1y_2-x_2y_1)^2 = (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $2n$ nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$. On considère l'inégalité suivante : $(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)^2 \leq (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)$. En posant $n(k) = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer à l'aide de $\mathfrak{R}_C$ que cette inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quels que soient les réels $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Problème 39. On note $C(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions numériques continues. On rappelle qu'un homomorphisme d'algèbres de $C(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est une application φ de $C(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C(\mathbb{R})$ on a

$$\varphi(\lambda f+\mu g) = \lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g) \text{ et } \varphi(f\cdot g) = \varphi(f)\varphi(g).$$

où $f\cdot g$ est l'application qui, à $x \in \mathbb{R}$, fait correspondre le produit des réels $f(x)$ et $g(x)$: $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = f(x)g(x)$.

I. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Vérifier que l'application $f \mapsto f(\alpha)$ est un homomorphisme d'algèbres de $C(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

II. Soit $\varphi \neq 0$ un homomorphisme d'algèbres de $C(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. On démontre dans ce qui suit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $f \in C(\mathbb{R})$, $\varphi(f) = f(\alpha)$.

1. On note 1 l'application constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, égale à 1 : $x \mapsto 1$. Montrer que $\varphi(1) = 1$.

2. On note I l'application identique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \mathrm{I}(x) = x$. On pose $\varphi(\mathrm{I}) = \alpha$. Montrer que l'énoncé

$$\forall f \in C(\mathbb{R}),\ \varphi(f) = f(\alpha)$$

est équivalent à l'énoncé

$$\forall f \in C(\mathbb{R}),\ f(\alpha) = 0 \Rightarrow \varphi(f) = 0$$

3. Soit $f \in C(\mathbb{R})$. On suppose que f est nulle sur un voisinage de α. Montrer qu'il existe $g \in C(\mathbb{R})$ tel que $f = g\cdot(\mathrm{I}-\alpha 1)$. En déduire que $\varphi(f) = 0$.

4. On suppose qu'il existe $f \in C(\mathbb{R})$ telle que l'on ait $f(\alpha) = 0$ et $\varphi(f) \neq 0$.

a) Montrer qu'on ne réduit pas la généralité de l'étude en supposant alors que $\varphi(f) = 1$.

b) On suppose cette dernière condition réalisée. Montrer qu'il existe $h \in C(\mathbb{R})$ telle que $h(x) = f(x)$ pour tout x dans un voisinage de α, et telle en outre que $|h(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Justifier l'égalité $1 = (1-h)^{-1}(1-h)$. En déduire le résultat annoncé.

Problème 40. 1. On veut définir une suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée $(\cos^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \cos^{(0)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \cos^{(n+1)} = \cos\circ\cos^{(n)} \end{cases}.$$

Justifier cette définition à l'aide du résultat suivant :

Soit E un ensemble non vide et f une application de E dans E. Pour tout $a \in$ E, il existe une suite unique u, application de $\mathbb{N}$ dans E, vérifiant les conditions

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

2. On a calculé les 50 premières valeurs de la suite $(\cos^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour trois valeurs de x :

n	$x = 1$	$x = 1{,}5$	$x = 3$
0	1	1,5	3
1	0,54030231	0,0707372	-0,9899925
2	0,85755322	0,99749917	0,54869613
3	0,65428979	0,54240499	0,85320531
4	0,79348036	0,85646971	0,65757167
5	0,70136877	0,6551088	0,79147875
…	…	…	…
40	0,73908517	0,73908521	0,73908508
41	0,73908511	0,73908508	0,73908517
42	0,73908515	0,73908517	0,73908511
43	0,73908512	0,73908511	0,73908515
44	0,73908514	0,73908515	0,73908512
45	0,73908513	0,73908512	0,73908514
46	0,73908514	0,73908514	0,73908513
47	0,73908513	0,73908513	0,73908514
48	0,73908513	0,73908514	0,73908513
49	0,73908513	0,73908513	0,73908513

On se propose d'étudier la conjecture C suivante :

C. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, les suites $(\cos^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos^{(n)}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, si $(\cos^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite ξ, alors on a : $\xi = \cos \xi$.

b) Montrer qu'il existe $k \in\ ]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\cos^{(n+1)}(x) - (\cos^{(n+1)}(y)| \leq k|\cos^{(n)}(x) - (\cos^{(n)}(y)|.$$

c) À partir des résultats précédents, démontrer ou réfuter la conjecture C.

3) Indiquer quelques-uns des sujets proposés aux épreuves orales du CAPES de mathématiques 2000 dans le traitement desquels on peut *a priori* envisager d'exploiter, moyennant des modifications qu'on ne précisera pas ici, le matériel mathématique précédent.

Problème 41. *L'étude ci-après a pour objet de démontrer le théorème de d'Alembert :* tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, de degré ≥ 1, possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

I. Dans cette question, on montre qu'on peut supposer que $|P(z)| \geq |P(0)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Soit u et $v \in \mathbb{C}$. Montrer que l'on a : $|u+v| \geq ||u|-|v||$.

2. On pose $P(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$, où $z, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, avec $a_n \neq 0$. Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$; montrer qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > \rho$, alors $|P(z)| \geq K$.

3. Déduire de ce qui précède qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|P(z)| \geq |P(z_0)|$. Montrer en outre que, dans le cadre de l'étude amorcée, on peut supposer que $z_0 = 0$.

II. On suppose désormais que l'on a $|P(z)| \geq |P(0)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On va montrer que, en fait, on a $P(0) = 0$.

1. Vérifier qu'il existe un entier m, des nombres complexes a et b, $b \neq 0$, et un polynôme à coefficients complexes Q tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $P(z) = a + bz^m + z^{m+1}Q(z)$.

2. Soit ω une racine m-ième du nombre complexe $-\dfrac{a}{b}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \lambda < 1$. Vérifier que l'on a : $P(\lambda\omega) = (1-\lambda^m)a + (\lambda\omega)^{m+1}Q(\lambda\omega)$. Montrer alors que, si l'on suppose $a \neq 0$, on peut choisir λ tel que l'on ait : $|P(\lambda\omega)| < |a|$. Conclure.

Problème 42. *Dans ce qui suit, l'étude d'une suite convergente met en évidence le phénomène d'accumulation des erreurs d'arrondi lors de calculs numériques réalisés à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur.*

I. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de u_0 et u_1 et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence : $u_{n+1} = 111 - \dfrac{1130}{u_n} + \dfrac{3000}{u_n u_{n-1}}$ (♥).

1. On prend $u_0 = 2$ et $u_1 = -4$. On a calculé avec un tableur les premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi déterminée :

2 ; –4 ; 18,5 ; 9,37837838 ; 7,80115274 ; 7,15441448 ; 6,80678474 ; 6,59263277 ; 6,44946593 ; 6,34845206 ; 6,27443866 ; 6,21869677 ; 6,17585386 ; 6,14262717 ; 6,1202487 ; 6,16608656 ; 7,23502117 ; 22,0620785 ; 78,5755749 ; 98,3495031 ; 99,8985693 ; 99,993871 ; 99,9996304 ; 99,9999777 ; 99,9999987 ; …

Quelle conjecture peut-on raisonnablement formuler quant à la limite λ_0 de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Vérifier que l'on a bien : $\lambda_0 = 111 - \dfrac{1130}{\lambda_0} + \dfrac{3000}{\lambda_0{}^2}$.

2. Montrer que la limite λ d'une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 et u_1 et par la relation de récurrence (♥) vérifie l'équation $\lambda^3 = 111\lambda^2 - 1130\lambda + 3000$. Préciser les solutions de cette équation.

3. On considère à nouveau la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = -4$, et par la relation de récurrence (♥). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{4\times 5^{n+1} - 3\times 6^{n+1}}{4\times 5^n - 3\times 6^n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Problème 43. *Dans l'étude qui suit, on démontre l'irrationalité du nombre π.*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n le polynôme défini par : $P_n(X) = \dfrac{1}{n!} X^n(1-X)^n$. D'après la formule de Leibniz, on a, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$: $P_n^{(k)}(X) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i (X^n)^{(i)}((1-X)^n)^{(k-i)}$.

a) Montrer que, si $k < n$, on a $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(1) = 0$.
b) Montrer de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et que l'on a $P_n^{(n)}(0) = 1$.
2. Soit f une application de classe C^∞ de [0, 1] dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\int_0^1 P_n^{(n)}(x)f(x)\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^1 P_n(x)f^{(n)}(x)\mathrm{d}x$.

3. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, si α est rationnel, alors il en est de même de $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$ tels que $\int_0^1 P_n^{(n)}(x)f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{A_n}{B_n}$.

b) On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n\int_0^1 P_n(x)f^{(n)}(x)\mathrm{d}x = 0$ et que $A_n \neq 0$ pour une infinité de valeurs de n. En déduire que l'hypothèse de rationalité de α doit être rejetée.
4. On suppose ici que $\alpha = \pi$ et on prend pour f l'application définie sur [0, 1] par $f(x) = \sin(\pi x)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\mathrm{I}_k \in \mathbb{Z}[X]$ de degré k tel que $\int_0^\pi x^k \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_k(\pi)$. Déduire alors de ce qui précède que π est irrationnel.

Problème 44. *Dans ce qui suit, les questions 1 et 2 sont préparatoires à la question 3, où l'on établit l'égalité* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. a) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x = 2 \sin x \cos 2kx$.
b) On *admet* que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme T_n de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos nx = T_n(\cos x)$. Déduire de ce qui précède que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme F_m de degré m tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin(2m+1)x = \sin x\, F_m(\sin^2 x)$.

c) En observant que F_m a pour zéros les réels $\sin^2 \dfrac{k\pi}{2m+1}$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$, montrer qu'on a :

$$F_m(X) = (2m+1)\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{X}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right) \text{puis que } \sin x = (2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2m+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right)$$

2. a) Établir les résultats suivants, où e est la base des logarithmes népériens et $t, u \in \mathbb{R}$:

$$e^t \geq 1+t \text{ ; si } 1+t > 0, \text{ alors } e^{-t} \leq \frac{1}{1+t} \text{ ; si } u < 1, \text{ alors } e^{-u/(1-u)} \leq 1-u.$$

b) Soit $U \subset [0, 1[$ un ensemble fini non vide. Déduire des résultats précédents que l'on a

$$1-\sum_{u\in U}\frac{u}{1-u} \leq e^{-\sum_{u\in U} u/(1-u)} \leq \prod_{u\in U}(1-u) \leq e^{-\sum_{u\in U} u} \leq 1.$$

En observant que $e^{-\sum_{u\in U} u} \leq \dfrac{1}{1+\sum_{u\in U} u}$, en déduire que, si $\sum_{u\in U} u < 1$, on a :

$$\frac{\sum_{u\in U} u}{1+\sum_{u\in U} u} \leq 1-\prod_{u\in U}(1-u) \leq \sum_{u\in U}\frac{u}{1-u}.$$

3. a) Pour $k = 1, 2, \ldots, m$, on pose $u_k = \left(\dfrac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2$. Montrer que pour x assez proche de 0 dans $]0, \pi[$, on a :

$$\frac{\sum_{1\leq k\leq m} u_k}{1+\sum_{1\leq k\leq m} u_k} \leq 1-\frac{\sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}} \leq \sum_{1\leq k\leq m}\frac{u_k}{1-u_k}.$$

b) Déduire de l'encadrement précédent l'égalité $\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{1}{(2m+1)^2}\right) = \sum_{1\leq k\leq m}\left(\dfrac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2$ puis l'égalité suivante, où N est un entier positif inférieur à m :

$$\left|\frac{1}{6}-\sum_{1\leq k\leq N}\left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2\right| = \frac{1}{6(2m+1)^2}+\sum_{N+1\leq k\leq m}\left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2.$$

c) On *admet* que $\sin t \geq \dfrac{2}{\pi}t$ pour $t \in [0, \pi/2[$. En déduire que l'on a $\left|\dfrac{1}{6}-\sum_{1\leq k\leq N}\dfrac{1}{k^2\pi^2}\right| \leq \dfrac{R_N}{4}$, où $R_N = \sum_{k\geq N+1}\dfrac{1}{k^2}$. Que peut-on en conclure ?

Problème 45. I. Résultats préliminaires. – On rappelle les résultats suivants.

① Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on note $[a]_n$ l'élément correspondant de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $[a]_n = \{ a+kn \,/\, k \in \mathbb{Z} \}$. Le symbole $\equiv_n$ désignant l'égalité modulo n, on a encore : $[a]_n = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, x \equiv_n a \}$.

② On désigne par U_n le groupe multiplicatif des unités de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui possèdent un inverse dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a : $[a]_n \in U_n \Leftrightarrow \text{PGCD}(a, n) = 1$; ainsi par exemple $U_6 = \{ 1, 5 \}$, $U_8 = \{ 1, 3, 5, 7 \}$, $U_9 = \{ 1, 2, 4, 5, 7, 8 \}$.

③ Si G est un groupe fini d'ordre m noté multiplicativement, pour tout $x \in G$ on a $x^m = 1_G$ (où 1_G est l'élément neutre du groupe G).

On pose $\varphi(1) = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $\varphi(n) = \text{card } U_n$; on a donc, par exemple, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(8) = 4$, $\varphi(9) = 6$. (L'application $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ ainsi définie est l'*indicatrice d'Euler*.)

1. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $a \in \mathbb{Z}$, si $\text{PGCD}(a, n) = 1$ alors $a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$.
2. On suppose $n > 2$. Montrer que, alors, $[n-1]_n \in U_n$. En déduire que $\varphi(n) \geq 2$.

II. Cryptographie à clé publique. – Un groupe de personnes, $\mathfrak{R}$, souhaite pouvoir échanger confidentiellement des messages prenant la forme de nombres entiers s'écrivant avec au plus r chiffres (où $r \in \mathbb{N}^*$). Le gestionnaire du réseau $\mathfrak{R}$ qu'elles forment attribue à chaque membre du réseau $I \in \mathfrak{R}$ un entier $\mu(I)$ de la forme $n = pq$, où p et

q sont des nombres premiers distincts qui s'écrivent avec au moins $r+1$ chiffres. L'application $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{N}$ ainsi définie est supposée injective ; $n = \mu(I)$ est appelé le *module* de I. Par ailleurs, le gestionnaire définit une application $\gamma : \mathfrak{R} \to \mathbb{N}$ qui assigne à chaque membre du réseau $I \in \mathfrak{R}$ un entier $c = \gamma(I)$ premier avec $\varphi(n)$, où $n = \mu(I)$. L'entier $c = \gamma(I)$ est appelé l'entier de *chiffrement* de I.

1. Montrer qu'on peut définir une application $\delta : \mathfrak{R} \to \mathbb{N}$ qui assigne à chaque membre $I \in \mathfrak{R}$ un entier $d = \delta(I)$ vérifiant $0 < d < \varphi(n)$ et $cd \equiv_{\varphi(n)} 1$, où $c = \gamma(I)$. (L'entier $d = \delta(I)$ est appelé entier de *déchiffrement* de I.)

Dans ce qui suit, on suppose qu'une telle application δ a été définie, mais que seul I connaît son entier de déchiffrement personnel, $d = \delta(I)$. (On n'examinera pas ici comment cette confidentialité est rendue possible.)

2. a) Soit n, c et d le module et les entiers de chiffrement et de déchiffrement d'un membre D du réseau $\mathfrak{R}$, et soit a un entier s'écrivant avec au plus r chiffres (a est le « message en clair »). Soit alors $b \in [0, n[$ tel que $b \equiv_n a^c$. Démontrer que l'on a : $b^d \equiv_n a$.

b) On suppose que $E \in \mathfrak{R}$ (l'expéditeur) souhaite transmettre à $D \in \mathfrak{R}$ (le destinataire) un message constitué d'un unique nombre entier a d'au plus r chiffres ; E et D adoptent la procédure suivante : E chiffre le message a en le remplaçant par $b \in [0, n[$ tel que $b \equiv_n a^c$, et transmet le message constitué par l'entier b à D. Déduire de ce qui précède que, connaissant b (le message chiffré), D pourra retrouver a (le message en clair).

Problème 46. *L'étude ci-après porte sur l'ordre de convergence de la méthode d'interpolation linéaire (ou des sécantes).*

I. Soit une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $x_n \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = |x_n - \alpha|$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet le réel $p > 0$ pour ordre de convergence si la suite de terme général $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\,p}}$ (où $n \in \mathbb{N}$) admet une limite finie $K > 0$. Montrer que, s'il existe, l'ordre de convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.

II. Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en un point α de I, dont la dérivée f' ne s'annule pas sur I, et qui admet sur I une dérivée seconde continue, avec $f''(\alpha) \neq 0$. Soit alors x_0 et x_1 deux points distincts de I\{α}. On suppose que les égalités $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ où $n \geq 1$ définissent une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α. On *admet* en outre le résultat suivant : pour tout $n \geq 1$, il existe $\beta_n \in \mathrm{J}(\alpha, x_{n-1}, x_n)$ et $\gamma_n \in \mathrm{J}(x_{n-1}, x_n)$ tels que $\varepsilon_{n+1} = \left|\dfrac{f''(\gamma_n)}{2f'(\beta_n)}\right| \varepsilon_n\varepsilon_{n-1}$ (où $\mathrm{J}(a, b, c, \ldots)$ désigne le plus petit intervalle contenant a, b, c, …).

1. Dans cette question, on suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet le réel $p > 0$ pour ordre de convergence, avec $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\,p}} = K$. Montrer que p vérifie l'égalité $p^2 - p - 1 = 0$ et que $K = \left|\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{1/p}$. En conclure que l'ordre de convergence p est le « nombre d'or » $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Dans cette question, on démontre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet le réel ϕ pour ordre de convergence.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $y_n = \dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}^{\,\phi}}$. En observant que $\phi - 1 = \dfrac{1}{\phi}$ montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$y_{n+1} = c_n\, y_n^{-1/\phi}, \text{ où } c_n = \left|\frac{f''(\gamma_n)}{2f'(\beta_n)}\right|.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(y_n)$, $v_n = \ln(c_n)$. Montrer que, pour $n \geq 2$,

$$u_n = \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n-1} u_1 + S_n \text{ où } S_n = \sum_{i=0}^{n-2} v_{n-i-1}\left(-\frac{1}{\phi}\right)^{i}.$$

En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ converge.

c) Vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ln\left|\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$. En observant que, pour $n \geq 2$, on a

$$S_n = [(v_{n-1} - v) + k(v_{n-2} - v) + k^2(v_{n-3} - v) + \ldots + k^{n-2}(v_1 - v)] + v(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-2})$$

où $v = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ et $k = = -\dfrac{1}{\phi}$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{\phi}\ln\left|\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour ordre de convergence et que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\phi}} = \left|\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{1/\phi}$.

Problème 47. Dans ce qui suit, M est un *système multiplicatif* de nombres réels strictement positifs, c'est-à-dire un ensemble $M \subset \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tous $x, y \in M$, on a $xy \in M$. Pour tous $x, y \in M$, on dit que x divise y dans M si $\dfrac{y}{x} \in M$. Si $x \in M$ divise ainsi tout nombre $y \in M$, on dit que x est une *unité* de M ; on désigne par U l'ensemble des unités de M. On dit alors qu'un nombre $x \in M$ est *sécable* s'il existe $y, z \in M\backslash U$ tels que $x = yz$. Un nombre qui n'est pas sécable est dit *insécable*. (Dans le cas où $M = \mathbb{N}^*$, on retrouve la notion usuelle de divisibilité ; on a donc $U = \{ 1 \}$. Un nombre insécable est alors un entier *premier*, et un nombre sécable un entier *composé*.)

1. Dans ce qui suit, on pose $\prod = \{ m + n\sqrt{10} \ / \ m, n \in \mathbb{Z} \} \cap \mathbb{R}_+^*$. Vérifier les trois propriétés suivantes : a) $\prod$ est un système multiplicatif ; b) dans $\prod$, $2 + \sqrt{10}$ divise $12 + 3\sqrt{10}$; c) $3 + \sqrt{10}$ est une unité de $\prod$.

2. On suppose que, sur M, est définie une application f à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant les deux propriétés suivantes : a) pour tous $x, y \in M$, $f(xy) = f(x)f(y)$; b) pour tout $x \in M$, x est une unité de M si et seulement si $f(x) = 1$. Démontrer que tout $x \in M$ s'écrit sous la forme d'un produit $x = y_1 \ldots y_m$ de nombres insécables de M.

3. Pour tout nombre $a + b\sqrt{10} \in \prod$, on pose : $\varphi(a + b\sqrt{10}) = |a^2 - 10b^2|$. Montrer que, quels que soient $a + b\sqrt{10}$ et $c + d\sqrt{10} \in \prod$, on a : $\varphi((a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10})) = \varphi(a + b\sqrt{10})\varphi(c + d\sqrt{10})$. En déduire que $a + b\sqrt{10} \in \prod$ est une unité de $\prod$ si et seulement si $\varphi(a + b\sqrt{10}) = 1$.

4. En observant qu'un carré parfait qui n'est pas de forme $5k$ est de la forme $5k \pm 1$, montrer que les nombres 2, 3, $4 + \sqrt{10}$ et $4 - \sqrt{10}$ sont insécables dans $\prod$. Vérifier qu'on a : $2 \times 3 = (4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})$; que peut-on en conclure ?

Problème 48. On considère la suite (r_n) définie par $r_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, par la relation de récurrence $r_{n+1} = \mathrm{Mod}(5r_n+1 ; 16)$, où $\mathrm{Mod}(a ; b)$ désigne le reste de a dans la division euclidienne par b (avec $a, b \in \mathbb{N}^*$). Un programme de calcul a fourni les valeurs suivantes de (r_n) : 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13…

1. Justifier le fait que les valeurs de (r_n) sont alternativement paires et impaires.

2. On définit la suite (s_n) par $s_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, par la relation de récurrence $s_{n+1} = 5s_n+1$. Les résultats présentés dans le tableau ci-après peuvent porter à penser que, pour tout entier $n \geq 0$, on a : $r_n = \mathrm{Mod}(s_n ; 16)$. Démontrer qu'il en est bien ainsi.

r_n	s_n	$\mathrm{Mod}(s_n ; 16)$
1	1	
6	6	6
15	31	15
12	156	12
13	781	13
2	3906	2
11	19531	11
8	97656	8
9	488281	9
14	2441406	14
7	12207031	7
4	61035156	4
5	305175781	5
10	1525878906	10

3. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a : $s_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n$. En déduire que, pour tout $n \geq 0$, on a : $r_n = \mathrm{Mod}(1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n ; 16)$.

4. On aura observé que l'on a : $\{ r_0, r_1, \ldots, r_{15} \} = \{ 0, 1, \ldots, 15 \}$. Expliquer pourquoi il en est ainsi et démontrer que, pour tout $i \in \{ 0, 1, \ldots, 15 \}$ et pour tout entier $k \geq 1$, on a : $r_{i+16k} = r_i$.

5. Que se passe-t-il si l'on change la valeur de r_0 (en restant dans $\{ 0, 1, \ldots, 15 \}$) ? On pourra s'appuyer sur les suites $r_0, r_1, \ldots, r_{15}$ ci-après :

0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5, 10, 3
1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5, 10, 3, 0
2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13
3, 0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5, 10

Problème 49. Soit $\mathrm{I} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{F}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}$ celui des applications *continues* de I dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ celui des applications *dérivables* de I dans $\mathbb{C}$. On a les inclusions strictes $\mathcal{D} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

1. Soit $\mathcal{D}'$ l'image de $\mathcal{D}$ par l'application linéaire de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{F}$ qui associe à $F \in \mathcal{D}$ sa dérivée $f = F'$.

a) Justifier l'inclusion $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}'$.

b) Soit $F \in \mathcal{F}$ définie par $F(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$, $= 0$ sinon. Montrer que $F \in \mathcal{D}$, mais que $F' \notin \mathcal{C}$. En déduire que l'on a l'inclusion stricte $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}'$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{F}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x > 0$, $= 0$ sinon. On admet le résultat suivant, dû à Gaston Darboux : si $F \in \mathcal{D}$, alors $F'(\mathrm{I})$ est connexe. En déduire que $\varphi \notin \mathcal{D}'$. (On a donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}' \subset \mathcal{F}$.)

3. On veut montrer que, si $f, g \in \mathcal{D}'$, on n'a pas nécessairement $fg \in \mathcal{D}'$: en d'autres termes, $\mathcal{D}'$ n'est pas une algèbre. On considère $G, h, k, \ell \in \mathcal{F}$ définies par $G(0) = h(0) = k(0) = \ell(0)$ et, pour $x > 0$, par $G(x) = x^2\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}}{x^2}\right)$, $h(x) = 2x \exp\left(\dfrac{\mathrm{i}}{x^2}\right)$, $k(x) = \dfrac{1}{x} \exp\left(\dfrac{\mathrm{i}}{x^2}\right)$, $\ell(x) = x \exp\left(\dfrac{-2\mathrm{i}}{x^2}\right)$.

a) Vérifier que $G \in \mathcal{D}$ et que $G' = h - 2\mathrm{i}k$. En déduire que $k \in \mathcal{D}'$.

b) En observant que $k^2\ell = \varphi$, montrer que $\mathcal{D}'$ n'est pas une algèbre.

Problème 50. Tout nombre premier hormis 2 est soit de la forme $4k + 1$, soit de la forme $4k + 3$. Dans ce qui suit, on démontre que, si p est un nombre premier de la forme $4k + 1$, alors il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = a^2 + b^2$ (Albert Girard, 1632 ; Pierre de Fermat, 1654). On a ainsi : $5 = 1^2 + 2^2$.

1. a) Soit S un ensemble fini non vide et $f : S \to S$ une involution, c'est-à-dire une application telle que $f^2 = \mathrm{Id}_S$. Montrer que, pour tous $s, t \in S$, on a soit $\{ s, f(s) \} \cap \{ t, f(t) \} = \varnothing$, soit $\{ s, f(s) \} = \{ t, f(t) \}$.

b) En considérant l'égalité $S = \bigcup_{s\in S} \{ s, f(s) \}$, montrer que, si Card S est impair, alors f possède au moins un point fixe.

c) On prend désormais $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3} / x^2 + 4yz = p \}$ où $p = 4k + 1$ est un nombre premier ; l'ensemble S est fini, et non vide (puisque par exemple $(1, 1, k) \in S$). Soit f l'involution définie sur S par $f(x, y, z) = (x, z, y)$. On admet (provisoirement) que Card S est impair. En déduire le théorème de Girard-Fermat.

2. a) On suppose que φ est une involution de S ayant un point fixe unique. Montrer que Card S est impair.

b) On pose $S_1 = S \cap \{ x < y - z \}$, $S_2 = S \cap \{ y - z < x < 2y \}$, $S_3 = S \cap \{ x > 2y \}$. Vérifier que $(S_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une partition de S.

c) On pose $\varphi(x, y, z) = (x + 2z, z, y - x - z)$ si $(x, y, z) \in S_1$, $= (2y - x, y, x - y + z)$ si $(x, y, z) \in S_2$, $= (x - 2y, x - y + z, y)$ si $(x, y, z) \in S_3$. Vérifier que l'on a $\varphi(S_1) \subseteq S_3$, $\varphi(S_2) \subseteq S_2$, $\varphi(S_3) \subseteq S_1$ et que φ est une involution de S. Montrer que $(1, 1, k)$ est l'unique point fixe de φ. Que peut-on conclure ?

Problème 51. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), on désigne par $|X|$ la norme euclidienne de X. Soit D la boule unité (compacte) de $\mathbb{R}^n$: $D = \{ X \in \mathbb{R}^n / |X| \leq 1 \}$. Pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $\|A\| = \max \{ |AX| / X \in D \}$. On a en particulier $\|I\| = 1$, où I est la matrice unité d'ordre n. On rappelle que l'application $\| \ \|$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$ est une norme qui vérifie l'inégalité $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ et que, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente. L'objectif de l'étude est de démontrer que, étant donné $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, si $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est assez proche de A, c'est-à-dire si $\|B - A\|$ est assez petit, alors $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|I - A\| < 1$.

a) Montrer que la série de terme général $(I - A)^k$ converge.

b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N = \sum_{k=0}^{N} (I - A)^k$. En observant que $S_N - AS_N = S_{N+1} - I$, montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$.

2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\|B - A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. Montrer que $A^{-1}B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la partie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

Problème 52. Soit f une application continue de $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On démontre ci-après que la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k(1 - x)^{n-k} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ converge uniformément vers f sur I (démonstration due à S. N. Bernstein du théorème de Weierstrass). Soit un réel $\varepsilon > 0$; f étant continue sur le compact I est uniformément continue sur I : il existe donc un réel $\delta > 0$ tel que, pour tous $x', x'' \in I$, si $|x' - x''| < \delta$, alors $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On pose en outre $M = \sup_{x\in I} |f(x)|$.

1. Vérifier que, pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) - B_n(f)(x) = \Sigma^+ + \Sigma^-$, où $\Sigma^+ = \sum_{k\in K^+} \mathrm{C}_n^k x^k(1 - x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$ et $\Sigma^- = \sum_{k\in K^-} \mathrm{C}_n^k x^k(1 - x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$, avec $K^+ = \left\{ k \in \mathbb{N} \mathbin{/} 0 \le k \le n \text{ et } \left|\dfrac{k}{n} - x\right| \ge \delta \right\}$ et $K^- = \left\{ k \in \mathbb{N} \mathbin{/} 0 \le k \le n \text{ et } \left|\dfrac{k}{n} - x\right| < \delta \right\}$. Montrer que l'on a : $|\Sigma^-| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$.

2. Soit $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ telles que, pour $1 \le i \le n$, $P(X_i = 1) = x$ et $P(X_i = 0) = 1 - x$. On pose $\overline{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. On rappelle que $E(\overline{X}) = x$ et $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \dfrac{x(1 - x)}{n}$.

a) Montrer que $P(|\overline{X} - x| \ge \delta) = \sum_{k\in K^+} \mathrm{C}_n^k x^k(1 - x)^{n-k}$.

b) On rappelle que $P(|\overline{X} - x| \ge \delta) \le \dfrac{\mathrm{Var}(\overline{X})}{\delta^2}$ (inégalité de Bieynamé-Tchebychev). Montrer que, pour n assez grand, $|\Sigma^+| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. Que peut-on en conclure ?

Problème 53. 1. On s'efforce de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

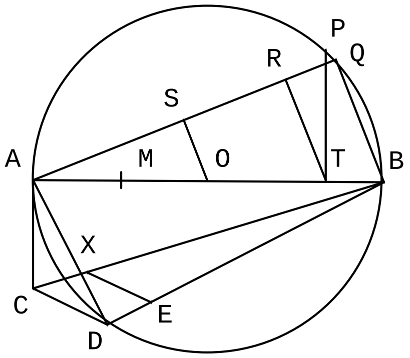
a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; montrer que l'équation précédente s'écrit $[x^2 + \dfrac{a}{2}x + \lambda]^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, où α, β, γ dépendent de λ.

b) On suppose que l'on connaît un réel λ tel que l'on ait : $\beta^2 = 4\alpha\gamma$. Montrer que l'on peut alors résoudre l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

c) Quel problème rencontre-t-on, dans le cas général, pour trouver λ tel que $\beta^2 = 4\alpha\gamma$?

2. *À l'aide de la technique esquissée ci-dessus*, résoudre l'équation $x^4 + x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x + 1 = 0$.

Problème 54. Étant donné un cercle de rayon 1, il n'est pas possible de construire à la règle et au compas un carré ayant même aire que le cercle donné, c'est-à-dire un carré de côté $\sqrt{\pi}$ (Lindemann, 1882). Mais il existe diverses constructions *approchées* correspondant à diverses valeurs *approchées* de π. La construction réalisée décrite ci-après est due à Srinivasa Ramanujan (1913).



Sur la figure ci-contre, O est le centre du cercle de diamètre [AB], M est le milieu de [AO] et T vérifie BT = $\frac{1}{3}$ OB = $\frac{1}{3}$. La droite (TP) est perpendiculaire à (AB) et l'on a BQ = TP. S est le milieu de de [AQ] et D vérifie AD = AS. On a (TR) // (BQ) // (OS). La droite (AC) est tangente au cercle en A et AC = RS. On a BE = BM et (EX) // (CD).

1. Le carré de côté BX a alors une aire voisine de π. Que vaut cette aire ?

2. Sachant que l'on a $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$, déterminer $k \in [1, 10[$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $|BX^2 - \pi| < k \cdot 10^{-p}$ en précisant si BX^2 est une valeur approchée de π *par excès* ou *par défaut*.

Problème 55. Dans un repère orthonormal, on considère la cubique C d'équation $x^3 + y^3 = 9$. Dans ce qui suit, on s'intéresse aux points M(x, y) de C à coordonnées rationnelles : $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

1. Donner un exemple d'un tel point.

2. Montrer que si M $\in C$ est un point à coordonnées rationnelles (x, y), alors x et y sont non nuls. Montrer de même qu'on n'a pas $x = y$.

3. Soit M(x_0, y_0) un point à coordonnées rationnelles de C. Montrer que la tangente T à C en M recoupe C en un point M' $\neq$ M à coordonnées rationnelles. Donner l'expression des coordonnées de M' en fonction de x_0 et y_0.

4. On considère les suites définies par $X_0 = 2$, $Y_0 = 1$, $Z_0 = 1$ et par les relations de récurrence suivantes : $X_{n+1} = X_n(X_n^3 + 2Y_n^3)$; $Y_{n+1} = -Y_n(2X_n^3 + Y_n^3)$; $Z_{n+1} = Z_n(X_n^3 - Y_n^3)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est pair et Y_n et Z_n sont impairs. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point M$_n$ de coordonnées $\left(\frac{X_n}{Z_n}, \frac{Y_n}{Z_n}\right)$ est bien défini.

b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point M$_n$ appartient à C. Préciser les coordonnées de M$_1$ et M$_2$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si α est l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de X_n, alors l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de X_{n+1} est $\alpha + 1$. En déduire que les points M$_n$ ($n \in \mathbb{N}$) sont tous distincts.

Problème 56. On considère deux dés non nécessairement équilibrés dont on note respectivement p_i et q_i la probabilité d'apparition de la face marquée i ($1 \leq i \leq 6$) ; on a $\sum_{i=1}^{6} p_i = \sum_{i=1}^{6} q_i = 1$ avec $p_i, q_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, 6$. On définit alors deux polynômes, P et Q, par : $P(X) = p_1X + p_2X^2 + p_3X^3 + p_4X^4 + p_5X^5 + p_6X^6$; $Q(X) = q_1X + q_2X^2 + q_3X^3 + q_4X^4 + q_5X^5 + q_6X^6$.

1. Montrer que, pour tout entier k de 2 à 12, lorsqu'on lance les deux dés, la probabilité r_k d'amener une somme de points égale à k est égale au coefficient de X^k dans le polynôme PQ.

2. On suppose que les dès sont parfaitement équilibrés, c'est-à-dire que, pour tous $i = 1, \ldots, 6$, on a : $p_i = q_i = \frac{1}{6}$. Déduire de ce qui précède les valeurs des probabilités r_k ($k = 2, 3, \ldots, 12$). *(Pour obtenir les coefficients du polynôme PQ, on pourra procéder par calcul formel sur une calculatrice scientifique.)*

3. On cherche à construire une paire de dés truqués donnant à toute somme de points de 2 à 12 la même probabilité d'apparaître.

a) Montrer que cela revient à trouver des nombres p_i et q_i ($1 \leq i \leq 6$) strictement positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{6} p_i = \sum_{i=1}^{6} q_i = 1$ et tels que : $(p_1 + \ldots + p_6X^5)(q_1 + \ldots + q_6X^5) = \frac{1}{11}(1 + \ldots + X^{10})$.

b) Montrer que, dans l'égalité précédente, le polynôme figurant au membre de gauche s'annule dans $\mathbb{R}$ tandis que le polynôme figurant au membre de droite n'a pas de racines réelles. Que peut-on en conclure ?

Problème 57. **I. Une algèbre réelle de dimension 3**. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on pose : $T_3 = \{ \varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ / il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = a + b\cos x + c\sin x$ }.

1. Montrer que, dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, l'ensemble { 1, cos et sin } est libre. En déduire que T_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

2. Pour tous $\varphi, \psi \in T_3$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi*\psi(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(x-t)\mathrm{d}t$. Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x) = a + b\cos x + c\sin x$ et $\psi(x) = d + e\cos x + f\sin x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\varphi*\psi \in T_3$ et exprimer $\varphi*\psi$ dans la base { 1, cos, sin } de T_3.

3. Montrer que la loi de composition interne $*$ définie sur T_3 est associative, commutative, qu'elle possède un élément unité, est distributive par rapport à l'addition et que, pour tous $\varphi, \psi \in T_3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi*(\lambda\psi) = (\lambda\varphi)*\psi = \lambda(\varphi*\psi)$. Existe-t-il dans T_3 des diviseurs de zéro, c'est-à-dire des éléments φ, ψ tels que l'on ait à la fois $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$ et $\varphi*\psi = 0$?

II. Algèbres réelles de dimension impaire. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit T une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension n, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une multiplication interne $*$ distributive par rapport à l'addition et telle que, pour tous $x, y \in T$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on ait : $x*(\lambda y) = (\lambda x)*y = \lambda(x*y)$. On suppose en outre que T possède un élément unité u et n'a pas de diviseurs de zéro à gauche, c'est-à-dire est telle que, pour tous $x, y \in T$, si $x*y = 0$ et $x \neq 0$, alors $y = 0$. On démontre dans ce qui suit que, si $n > 1$, la dimension n de T est nécessairement *paire*. Dans toute la suite, T est identifiée à $\mathbb{R}^n$, et on note simplement xy le produit $x*y$.

1. Soit $x \in T$; vérifier que l'application $\tau(x)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\tau(x)(y) = xy$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Montrer alors que l'application τ qui à tout $x \in T$ associe $\tau(x) \in L(\mathbb{R}^n)$ (où $L(\mathbb{R}^n)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$) est une application linéaire de T dans $L(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\tau(\varepsilon u) = \varepsilon \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, où $\varepsilon = \pm 1$.

2. Soit $x \in T$, $x \neq 0$. Montrer que $\tau(x)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ et que $\det \tau(x) \neq 0$ (où det désigne l'application qui, à tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, associe son déterminant).

3. On suppose n impair. Montrer qu'on a alors : $\det(\varepsilon \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \varepsilon$ (où $\varepsilon = \pm 1$).

4. On suppose désormais $n > 1$. Il existe alors un chemin continu γ allant de $-u$ à u dans T sans passer par 0, c'est-à-dire une application continue de $[-1, 1]$ dans T telle que $\gamma(-1) = -u$, $\gamma(1) = u$ et $\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$. On définit l'application ω de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par $\omega(t) = \det(\tau(\gamma(t)))$ pour tout $t \in [-1, 1]$. Déduire de ce qui précède que, pour tout $t \in [-1, 1]$, $\omega(t) \neq 0$.

5. On rappelle que l'application det de $L(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$ est continue. Montrer que ω est une application continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et que $\omega(\varepsilon) = \varepsilon$, où $\varepsilon = \pm 1$. En déduire qu'il existe $t_0 \in]-1, 1[$ tel que $\omega(t_0) = 0$, en contradiction avec le résultat précédent. Que peut-on en conclure ?

Problème 58. **I. Un résultat classique d'intégration approchée**. On considère le résultat suivant, désigné ci-après par (♣), qui permet de calculer des valeurs approchées d'une intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$:

> Soit f une application définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, où $a < b$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :
>
> $$T_n(f) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right),$$
>
> où $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $0 \leq i \leq n$. Si f possède sur $[a, b]$ une dérivée seconde f'' continue et telle qu'il existe un réel M vérifiant $|f''(x)| \leq M$, pour tout $x \in [a, b]$, alors on a : $\left| T_n(f) - \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} M$.

1. On prend $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x^2$, pour tout x $[0, 1]$. Calculer la valeur exacte de $T_5(f)$ et celle de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Vérifier que l'on a : $\left| T_5(f) - \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \dfrac{1}{150}$.

2. On prend $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x^{3/2}$, pour tout $x \in [0, 1]$. Vérifier que f ne satisfait pas les conditions d'application de (♣). Donner la valeur exacte de $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et la valeur décimale approchée à 10^{-3} près par excès de $T_5(f)$. En déduire un majorant de $\left| T_5(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right|$ de la forme $k{\cdot}10^{-3}$, où $1 \le k < 10$.

II. Démonstration de (♣). *Dans cette section, on se place dans le cadre général précisé dans la section précédente.* 1. Pour tout i, $1 \le i \le n$, on pose : $L_i = \dfrac{b-a}{2n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que l'on a : $L_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - m_i)f'(t)\mathrm{d}t$, où $m_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$.

2. Par une intégration par parties, montrer que $L_i = \dfrac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left(\dfrac{b-a}{2n}\right)^2 - (t - m_i)^2\right)f''(t)\mathrm{d}t$ où $1 \le i \le n$. En observant alors que l'on a $\left| T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} L_i \right|$, en déduire (♣).

III. Améliorations de (♣). 1. On suppose seulement que f possède sur $[a, b]$ une dérivée f' continue, et qu'il existe un réel N vérifiant $|f'(x)| \le N$, pour tout $x \in [a, b]$. Montrer que l'on a alors $|L_i| \le \dfrac{N}{4}\left(\dfrac{b-a}{n}\right)^2$. En déduire $\left| T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \le \dfrac{(b-a)^2}{4n} N$. Qu'obtient-on lorsque $f(x) = x^{3/2}$ pour $x \in [0, 1]$?

2. On suppose en outre que f'' existe sur $]a, b]$ et que les intégrales impropres $\int_a^b f''(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b |f''(t)|\mathrm{d}t$ convergent. Justifier dans ce cas l'égalité $L_i = \dfrac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left(\dfrac{b-a}{2n}\right)^2 - (t - m_i)^2\right)f''(t)\mathrm{d}t$, pour tout i, $1 \le i \le n$. En déduire que $\left| T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \le \dfrac{(b-a)^2}{8n^2}\int_a^b |f''(t)|\mathrm{d}t$. Qu'obtient-on ainsi lorsque $f(x) = x^{3/2}$ pour $x \in [0, 1]$?

Problème 59. 1. Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal, on considère le cercle C de centre O et de rayon 1, d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Montrer que l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}^2$ définie par

$$t \mapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

est une surjection sur l'ensemble $\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1 \text{ et } (x, y) \ne (0, 1) \}$.

2. Dans ce qui suit, on se propose de démontrer, par l'absurde, le résultat suivant : pour tout entier $n \ge 3$, il n'existe pas de polynômes p, q, r à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tels que les fractions p/r et q/r soient définies et non constantes sur $\mathbb{R}$ et vérifient, pour tout $t \in \mathbb{Q}$, $\left(\dfrac{p(t)}{r(t)}\right)^n + \left(\dfrac{q(t)}{r(t)}\right)^n = 1$. On suppose donc trois polynômes $p, q, r \in \mathbb{Q}[t]$ non tous constants, premiers entre eux dans leur ensemble dans $\mathbb{Q}[t]$ et vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité $p(t)^n + q(t)^n - r(t)^n = 0$, avec $r(t) \ne 0$.

a) En observant que l'hypothèse faite sur p, q, r entraîne la non-constance des fractions p/r et q/r, montrer que les polynômes $q'r - qr'$, $r'p - rp'$, $p'q - pq'$ (où p', q', r' sont les polynômes dérivés de p, q, r) ne sont pas nuls.

b) Vérifier que les solutions non nulles $(x, y, z) \in \mathbb{Q}(t)^3$ (où $\mathbb{Q}(t)$ est le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{Q}$) du système

$$\begin{cases} px + qy - rz = 0 \\ p'x + q'y - r'z = 0 \end{cases}$$

s'écrivent $x = \dfrac{f}{g}(q'r - qr')$, $y = \dfrac{f}{g}(r'p - rp')$, $z = -\dfrac{f}{g}(p'q - pq')$, où $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ sont non nuls et premiers entre eux.

c) Déduire de ce qui précède qu'il existe un polynôme non nul $g \in \mathbb{Q}[t]$ tel que l'on ait

$$p^{n-1} = \frac{1}{g}(q'r - qr'),\ q^{n-1} = \frac{1}{g}(r'p - rp'),\ r^{n-1} = -\frac{1}{g}(p'q - pq').$$

d) Soit k, ℓ, m le degré des polynômes p, q, r. On suppose qu'on a $k \geq \ell \geq m$. Montrer, par des considérations de degré sur l'égalité $gp^{n-1} = q'r - qr'$, que, lorsque $n \geq 3$, on aboutit ainsi à une impossibilité. Justifier alors le résultat annoncé.

Problème 60. I. On rappelle que, étant donné un nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$, où $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$. On rappelle en outre que, le nombre a étant un réel strictement positif, on a : $a^z = \mathrm{e}^{z\ln a}$. Dans tout ce qui suit, pour tout nombre complexe α, on note $\mathrm{Log}\,\alpha$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $\mathrm{e}^z = \alpha$; on a donc : $\mathrm{Log}\,\alpha = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{e}^z = \alpha \}$.

a) On suppose α réel ; préciser $\mathrm{Log}\,\alpha$.

b) Soit α un nombre complexe non nul. On note $\rho = |\alpha| > 0$ son module et $\theta = \mathrm{Arg}\,\alpha \in\,]-\pi, \pi]$ son argument principal ; on a donc : $\alpha = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Exprimer $\mathrm{Log}\,\alpha$ à l'aide de ρ et θ.

c) Étant donné des complexes non nuls α et β, on pose $[\alpha]^{[\beta]} = \{ \mathrm{e}^{\beta z} \,/\, z \in \mathrm{Log}\,\alpha \}$. Préciser l'ensemble $[\alpha]^{[\beta]}$ lorsque α est un réel strictement positif. Préciser de même l'ensemble $[\mathrm{i}]^{[1]}$.

II. a) Un nombre complexe α est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers relatifs. Montrer que si $\alpha = a + \mathrm{i}b$, où $a, b \in \mathbb{Z}$, alors α est algébrique.

b) On dit qu'un nombre complexe est transcendant s'il n'est pas algébrique. On admet le théorème suivant, dû indépendamment à A. O. Gelfond (1934) et Th. Schneider (1935) : si les nombres complexes α et β sont algébriques, avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, et si β n'est pas un réel rationnel, alors tout élément de $[\alpha]^{[\beta]}$ est transcendant. En déduire que 2^{i} et $2^{\sqrt{2}}$ sont transcendants.

c) Montrer que $\mathrm{e}^{\pi} \in [\mathrm{i}]^{[-2\mathrm{i}]}$. Que peut-on en conclure ?

d) Une calculatrice indique que $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}} \approx 262537412640768743{,}999999999999$. Montrer que, pourtant, $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ n'est pas un entier.

e) Soit α et γ des réels algébriques strictement positifs, avec $\alpha \neq 1$. Déduire du théorème de Gelfond-Schneider que $\beta = \dfrac{\ln\gamma}{\ln\alpha}$ est soit rationnel, soit transcendant. Que peut-on en conclure à propos de $\log_{10} r$, lorsque r est un réel rationnel strictement positif ?

Problème 61. I. On rappelle qu'on a $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$ et $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les applications $x \mapsto \cos\alpha x$ et $x \mapsto \mathrm{ch}\,\alpha x$ vérifient l'équation fonctionnelle

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

II. Dans ce qui suit, on détermine l'ensemble S des fonctions numériques f non nulles, indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$.

a) On suppose que $f \in S$. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.

b) On suppose que $f \in S$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$. En déduire que l'on a : $S = \{ 1 \} \cup \{ x \mapsto \cos\alpha x \,/\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \} \cup \{ x \mapsto \mathrm{ch}\,\alpha x \,/\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \}$.

III. On détermine maintenant l'ensemble T des fonctions numériques f non nulles, continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$.

a) Montrer, en intégrant l'égalité précédente, que f est de classe C^1.

b) Déduire de ce qui précède que l'on a $T = S$.

Problème 62. I. On rappelle le théorème de l'inégalité de la moyenne géométrique : étant donné des réels $x_i \in \mathbb{R}_+^*$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), on a $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, l'égalité n'étant réalisée que si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

a) Montrer que le théorème de l'inégalité de la moyenne géométrique entraîne le théorème suivant (nommé ci-après théorème du produit maximal) : étant donné un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$, quels que soient les réels $x_i \in \mathbb{R}_+^*$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, on a $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\dfrac{a}{n}\right)^n$, l'égalité étant réalisée si et seulement si $x_i = \dfrac{a}{n}$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

b) Montrer que, inversement, le théorème du produit maximal entraîne le théorème de l'inégalité de la moyenne géométrique.

II. a) On rappelle que l'aire d'un triangle ABC est égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où a = BC, b = CA, c = AB, $2p = a + b + c$. Déduire du théorème du produit maximal que, parmi les triangles ABC ayant un périmètre donné, les triangles équilatéraux ont l'aire la plus grande possible.

b) Déduire de même du théorème du produit maximal que, parmi les parallélépipèdes rectangles de même aire latérale, ce sont les cubes qui ont le plus grand volume.

III. Les manuels du XIX[e] siècle donnaient du théorème du produit maximal une démonstration que l'on peut formuler ainsi :

> Étant donné un n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de réels > 0 dont deux coordonnées au moins sont inégales, on peut construire un n-uplet $(x_1', x_2', ..., x_n')$ ayant même somme $(\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i')$ mais dont le produit des coordonnées soit strictement supérieur : $\prod_{i=1}^{n} x_i' > \prod_{i=1}^{n} x_i$. Supposons en effet qu'on ait par exemple $x_1 \neq x_2$, et posons alors $x_1' = x_2' = \frac{x_1+x_2}{2}$. On a $x_1'+x_2' = x_1+x_2$ (la somme est donc inchangée), mais on a aussi $x_1'x_2'-x_1x_2 = \frac{(x_1-x_2)^2}{4} > 0$, et donc $x_1'x_2' > x_1x_2$, de sorte que $\prod_{i=1}^{n} x_i' > \prod_{i=1}^{n} x_i$ (où $x_i' = x_i$ pour $i > 2$). Par suite, le produit $\prod_{i=1}^{n} x_i$ est maximal parmi les n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de réels > 0 dont la somme des coordonnées est égale à un réel a fixé lorsque $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{a}{n}$.

a) Montrer que la conclusion du théorème est justifiée si l'on admet que $\prod_{i=1}^{n} x_i$ atteint un maximum sur l'ensemble $H = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} x_i = a \}$.

b) Montrer que, en revanche, la démonstration des manuels du XIX[e] siècle est erronée. On pourra s'inspirer de ce raisonnement (volontairement) erroné dû à Oskar Perron (1880-1975) : « Cherchons le plus grand des nombres entiers. Ce ne peut être 2 car le carré de 2 est plus grand que 2 ; ni 3, car le carré de 3 est plus grand que 3 ; etc. Donc le plus grand des nombres entiers est 1. »

Problème 63. I. Soit une application p de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$, où $n \in \mathbb{N}^*$; on rappelle que p est une norme sur $\mathbb{R}^n$ si elle satisfait les trois conditions suivantes : (1) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$; (2) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$; (3) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. Montrer qu'une application p de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions (1) et (2) est une norme sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si l'ensemble $D_p = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ p(x) \leq 1 \}$ est convexe. (On pourra utiliser l'égalité $\frac{x + y}{p(x) + p(y)} = \frac{p(x)}{p(x) + p(y)}\frac{x}{p(x)} + \frac{p(y)}{p(y) + p(y)}\frac{y}{p(y)}$.)

II. Soit p une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $||x||$ la norme euclidienne de $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$: $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

a) Montrer que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n||x||$.

b) Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a : $p(x - y) \leq k||x - y||$. En déduire que p est une application lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

c) Soit S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne : $S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||x|| = 1 \}$. Déduire de ce qui précède qu'il existe des réels c et $C > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $c||x|| \leq p(x) \leq C||x||$.

d) Montrer à l'aide des résultats précédents que, dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, $D_p = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ p(x) \leq 1 \}$ est un compact convexe d'intérieur non vide.

III. Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, on considère un ensemble D compact, convexe, d'intérieur non vide et tel que, si $x \in D$, alors $-x \in D$.

a) Montrer que 0 est intérieur à D.

b) Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on pose $\mu D = \{ \mu y \ / \ y \in D \}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\mu > 0$ tel que $x \in \mu D$.

c) Montrer que, si $\mu_1 \leq \mu_2$, alors $\mu_1 D \subset \mu_2 D$. On pose $\mu_x = \inf \{ \mu > 0 \ / \ x \in \mu D \}$. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, on a : $\{ \mu > 0 \ / \ x \in \mu D \} = [\mu_x \ ; +\infty[$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $p(x) = \inf \{ \mu > 0 \ / \ x \in \mu D \}$. Montrer que p est une norme sur $\mathbb{R}^n$ telle que $D_p = D$.

Problème 64. *La première question montre comment on peut simuler la loi uniforme sur* $[0\,;1[$ *à partir de la loi uniforme sur* $\{0, 1, \ldots, 9\}$. *La seconde question traite de la simulation d'une loi continue ou d'une loi discrète à l'aide de la loi uniforme sur* $[0\,;1[$.

I. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et soit r variables aléatoires uniformes $X_1, \ldots, X_r$ prenant leurs valeurs dans l'ensemble $E = \{0, 1, \ldots, 9\}$ des entiers de 0 à 9. (On a donc $\mathrm{P}(X_k = 0) = \mathrm{P}(X_k = 1) = \ldots = \mathrm{P}(X_k = 9) = 0{,}1$ pour $k = 1, \ldots, r$.)
a) On considère la variable aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_r)$ à valeurs dans $E^r = \{0, 1, \ldots, 9\}^r$. Vérifier que, si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$ sont indépendantes, alors X est une variable aléatoire uniforme sur $\{0, 1, \ldots, 9\}^r$.
b) On considère l'ensemble $N_r = \{0, 1, \ldots, 10^r - 1\}$ des entiers de 0 à $10^r - 1$. Montrer que l'application φ de E^r dans N_r qui à $(d_1, \ldots, d_r) \in \{0, 1, \ldots, 9\}^r$ associe l'entier

$$10^{r-1}d_1 + 10^{r-2}d_2 + \ldots + 10d_{r-1} + d_r$$

est une bijection de E^r sur N_r.
c) On considère la variable aléatoire U à valeurs dans l'ensemble

$$I_r = 10^{-r}\,N_r = \{0, 10^{-r}, \ldots, 1 - 10^{-r}\}$$

définie par $U = 10^{-r}\varphi\circ X$. Soit $0 \le a < b < 1$ tels que $b \le 1 - 10^{-r}$. On pose

$$n = \mathrm{Card}\ \{k \in N_r\ /\ a \le 10^{-r}k < b\}.$$

Montrer que $10^{-r}(n-1) < b - a < 10^{-r}(n+1)$. En déduire que l'on a :

$$|\mathrm{P}(a \le U < b) - (b - a)| < 10^{-r}.$$

II. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0\,;1[$: pour $0 \le a < b < 1$, $\mathrm{P}(a \le U < b) = b - a$.
a) Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est strictement croissante. On pose : $Y = F^{-1}(U)$. Montrer que Y est une variable aléatoire ayant F pour fonction de répartition.
b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $V = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}$, où l'on a $v_1 < \ldots < v_m$. Pour $i = 1, \ldots, m$, on pose $\mathrm{P}(X = v_i) = p_i$. On considère la variable aléatoire Y définie par

$$Y = v_1 \text{ si } U < p_1\ ;\ = v_2 \text{ si } p_1 \le U < p_1+p_2\ ;\ \ldots\ ;\ = v_i \text{ si } \sum_{j=1}^{i-1} p_j \le U < \sum_{j=1}^{i} p_j\ ;\ = v_m \text{ si } \sum_{j=1}^{m-1} p_j \le U < 1.$$

Montrer que, pour $i = 1, \ldots, m$, on a : $\mathrm{P}(Y = v_i) = p_i$.

Solutions des problèmes

Problème 1

1. L'application $x \mapsto 1+|x|$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas, a est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}_-$ on a $a(x) = \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - 1$ et donc $a'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$; sur $\mathbb{R}_+$, $a(x) = \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ et donc $a'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$: a est strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Comme elle est continue en 0, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En vertu de la continuité de a sur $\mathbb{R}$, $a(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$; le théorème de la limite monotone et les égalités $\lim_{x\to-\infty} a(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} a(x) = 1$ entraînent alors que $a(\mathbb{R}) =]-1,1[$). Posons $y = a(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ et, pour $x \ne 0$, $x = \varepsilon|x|$, où $\varepsilon = \pm1$, de sorte que $y = \varepsilon|y|$; on a : $y = \dfrac{x}{1+|x|} \Leftrightarrow \varepsilon|y| = \dfrac{\varepsilon|x|}{1+|x|} \Leftrightarrow |y| = \dfrac{|x|}{1+|x|} \Leftrightarrow |x| = \dfrac{|y|}{1-|y|} \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1-|y|} \Leftrightarrow a^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$, égalité vérifiée aussi pour $x = 0$ (puisque $y = a(0) = 0$).
2. a) L'application $\tilde{a}$ étant bijective on a : $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(\tilde{a}(x),\tilde{a}(y)) = 0 \Leftrightarrow \tilde{a}(x) = \tilde{a}(y) \Leftrightarrow x = y$. L'égalité $\delta(y,x) = \delta(x,y)$ découle de l'égalité correspondante pour d. Enfin on a : $\delta(x,y) = d(\tilde{a}(x),\tilde{a}(y)) \le d(\tilde{a}(x),\tilde{a}(z)) + d(\tilde{a}(z),\tilde{a}(y)) = \delta(x,z) + \delta(z,y)$. L'application δ est donc une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$. Comme $\delta(x,y) = |\tilde{a}(x) - \tilde{a}(y)| \le |\tilde{a}(x)| + |\tilde{a}(y)| \le 1+1 = 2$, δ est bornée ; on a $\delta(-\infty,+\infty) = |\tilde{a}(-\infty) - \tilde{a}(+\infty)| = 2$.
b) Soit (x_n) une suite de points $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Il découle de l'égalité $\delta_{\mathbb{R}}(x_n,x) = d(a(x_n),a(x))$ que, si $\delta_{\mathbb{R}}(x_n,x)$ tend vers 0, alors, l'application a^{-1} étant continue, la distance $d(a^{-1}(a(x_n)),a^{-1}(a(x))) = d(x_n,x)$ tend vers 0 ; et que, inversement, si $d(x_n,x)$ tend vers 0, alors, l'application a étant continue, la distance $d(a(x_n),a(x)) = \delta_{\mathbb{R}}(x_n,x)$ tend vers 0.
c) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(\overline{\mathbb{R}},\delta)$: $\delta(x_n,x_m) = d(\tilde{a}(x_n),\tilde{a}(x_m))$ tend vers 0 quand n et m tendent vers l'infini. L'espace métrique $(\mathbb{R},d)$ étant complet, la suite de Cauchy $(\tilde{a}(x_n))$ admet une limite $y \in \mathbb{R}$; comme $\tilde{a}(x_n)$

$\in [-1,1]$ et que $[-1,1]$ est fermé, $y \in [-1,1]$: il existe donc $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\tilde{a}(x) = y$. Ainsi $\delta(x_n,x) = d(\tilde{a}(x_n),\tilde{a}(x))$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini : (x_n) tend vers x dans l'espace métrique $(\overline{\mathbb{R}},\delta)$.

Problème 2

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$; on a $d(0,x) \le d(0,y) + d(y,x)$ et donc $d(0,x) - d(0,y) \le d(y,x)$. En échangeant x et y on obtient, de même, $d(0,y) - d(0,x) \le d(x,y)$, soit encore $-(d(0,x) - d(0,y)) \le d(x,y)$. On a ainsi : $|d(0,x) - d(0,y)| \le d(x,y)$. Pour x fixé, $d(0,y)$ tend donc vers $d(0,x)$ lorsque $d(x,y)$ tend vers 0 : l'application $x \mapsto d(0,x)$ est donc continue en tout point x de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $y \in F$ et soit D le disque fermé de centre 0 et de rayon $d(0,y)$; l'ensemble $K = F\cap D$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ non vide (puisque $y \in K$), fermée (comme intersection des fermés F et D) et bornée (puisque $K \subset D$). Par suite, K est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ et l'application continue $x \mapsto d(0,x)$ possède sur K un minimum qu'elle atteint en au moins un point $u \in K \subset F$. Pour $x \in F\cap D$ on a donc $d(0,x) \ge d(0,u)$; pour $x \in F\backslash D$, on a $d(0,x) > d(0,y) \ge d(0,u)$. Ainsi, pour tout $x \in F$, $d(0,x) \ge d(0,u)$.
3. *a*) L'inégalité $0 < 1-|0|$ montre que $0 \notin F$. De même on a $1 \ge 1-|0|$, et donc $(0,1) \in F \ne \varnothing$. Les projections pr_1 et pr_2 (définies par $\mathrm{pr}_i(x) = x_i$) étant des applications continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, il en est de même de l'application $x \mapsto \varphi(x) = |\mathrm{pr}_1(x)| + \mathrm{pr}_2(x) -1$. L'équivalence $x_2 \ge 1-|x_1| \Leftrightarrow \varphi(x) \ge 0$ entraîne que $F = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$: F est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$.
b) Si $x = (x_1,x_2) \in F$ on a $|x_1|+x_2 \ge 1$, de sorte que $\lambda = \dfrac{1}{|x_1|+x_2} \in\ ]0,1]$. Comme $|\lambda x_1|+\lambda x_2 = \lambda(|x_1|+x_2) = 1$, $\lambda x \in F$. Comme $d(0,\lambda x) = \lambda d(0,x) \le d(0,x)$, les points u cherchés appartiennent à $\partial F = \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 = 1-|x_1| \}$. Pour $x \in \partial F$, $d^2(0,x) = x_1^2+x_2^2 = |x_1|^2+x_2^2 = (1-x_2)^2+x_2^2 = 2x_2^2 - 2x_2 + 1 = 0{,}5 + 2(x_2-0{,}5)^2$: $d(0,x)$ est donc minimal sur ∂F pour $x_2 = 0{,}5$ et $x_1 = \pm 0{,}5$. On obtient ainsi les points $u' = (-0{,}5;0{,}5)$ et $u'' = (0{,}5;0{,}5)$, qui vérifient $d(0,u') = d(0,u'') = 1/\sqrt{2} \le d(0,x)$ pour tout $x \in F$.
4. *a*) D'après la question 2 il existe au moins un point $u \in C$ tel que $d(0,u) \le d(0,x)$ pour tout $x \in C$. S'il existait deux tels points, $u' \ne u''$, on aurait $d(0,u') = d(0,u'') = \delta$, et donc, en désignant par u le milieu de $[u',u'']$, $d^2(0,u) = \delta^2 - \dfrac{d^2(u',u'')}{4} < \delta^2$: contradiction.
b) Soit $x \in C$ et soit $\lambda \in [0,1]$; C étant convexe, $x_\lambda = (1-\lambda)u+\lambda x \in C$ et on a : $d^2(0,x_\lambda) \ge d^2(0,u)$. Comme $d^2(0,x_\lambda) = ||(1-\lambda)u+\lambda x||^2 = ||u+\lambda(x-u)||^2 = ||u||^2 + 2\lambda u\cdot(x-u) + \lambda^2||(x-u)||^2$, il vient $2\lambda u\cdot(x-u) + \lambda^2||(x-u)||^2 \ge 0$. En divisant cette inégalité par 2λ puis en faisant tendre λ vers 0, on obtient $u\cdot(x-u) \ge 0$. La médiatrice de $[0,u]$ admet l'équation $f(x) = u\cdot(x - \dfrac{u}{2}) = 0$, pour laquelle $f(0) = u\cdot(-\dfrac{u}{2}) = -\dfrac{||u||^2}{2} < 0$. Pour $x \in C$ on a $f(x) = u\cdot(x - \dfrac{u}{2}) = u\cdot(x - u)+\dfrac{||u||^2}{2} > 0$, soit $x \in \{ f(x) > 0 \}$, comme demandé.

Problème 3

1. *a*) On a $||1|| = ||1\times 1|| = ||1||^2$. Comme $1 \ne 0$, on a $||1|| \ne 0$; en divisant l'égalité $||1|| = ||1||^2$ par $||1||$, on obtient alors $||1|| = 1$. On a ainsi $||-1||^2 = ||(-1)(-1)|| = ||1|| = 1$, et donc $||-1|| = 1$ (car $||-1|| \in \mathbb{R}_+$). Enfin $||-x|| = ||(-1)x|| = ||-1||\ ||x|| = ||x||$. Si $x \ne 0$, $||x^{-1}|| = ||x^{-1}||\ ||x||\ ||x||^{-1} = ||xx^{-1}||\ ||x||^{-1} = ||x||^{-1}$.
b) On a $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow ||x-y|| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\delta(y,x) = ||y-x|| = ||-(x-y)|| = ||x-y|| = \delta(x,y)$, et $\delta(x,y) = ||x-y|| = ||(x-z)+(z-y)|| \le ||x-z|| + ||z-y|| = \delta(x,z) + \delta(z,y)$: δ est une distance sur $\mathbb{R}$. Comme $||x^n|| = ||x||^n$, on a : $x^n \to 0$ dans $(\mathbb{R},\delta) \Leftrightarrow ||x^n|| \to 0$ dans $(\mathbb{R},d) \Leftrightarrow ||x||^n \to 0$ dans $(\mathbb{R},d) \Leftrightarrow ||x|| < 1$.
2. *a*) On a $|x|^r = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (VA_1), et $|xy|^r = (|x||y|)^r = |x|^r|y|^r$ (VA_2).
b) Si $0 < r < 1$, soit $\varphi(x) = 1+x^r-(1+x)^r$; on a $\dfrac{1}{r}\varphi'(x) = x^{r-1}-(1+x)^{r-1} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1-r} - \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{1-r}$. Comme l'application $u \mapsto u^{1-r}$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (puisque $0 < 1-r < 1$), l'inégalité $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{x}$ entraîne que $\varphi'(x) > 0$; comme $\varphi(0) = 0$, on a $\varphi(x) > 0$, soit $(1+x)^r < 1+x^r$, pour $x > 0$. Pour $xy \ne 0$, il vient alors : $|x+y|^r \le (|x|+|y|)^r = |x|^r(1+|x/y|)^r < |x|^r(1+|x/y|^r) = |x|^r + |y|^r$. L'inégalité demandée étant trivialement vraie pour $xy = 0$, $|\ |^r$ satisfait VA_3. Si $r > 1$, on a $|1+1|^r = 2^r > |1|^r + |1|^r = 2$: l'axiome VA_3 n'est pas satisfait.
c) On a : $d_r(x_n,x) \to 0 \Leftrightarrow |x_n-x|^r \to 0 \Leftrightarrow |x_n-x| \to 0 \Leftrightarrow d(x_n,x) \to 0$.
3. *a*) On a : $||x|| < 1 \Leftrightarrow x^n \to 0$ dans $(\mathbb{R},\delta) \Leftrightarrow x^n \to 0$ dans $(\mathbb{R},d) \Leftrightarrow |x| < 1$.

b) On a : $m/n > \gamma \Rightarrow |x_0|^\gamma < |x_0|^{m/n} \Leftrightarrow |x| < |x_0|^{m/n} \Leftrightarrow |x^n/x_0^m| < 1 \Leftrightarrow \|x^n/x_0^m\| < 1 \Leftrightarrow \|x\| < \|x_0\|^{m/n}$. Cette inégalité étant vraie pour tous m, n tels que $m/n > \gamma$, on a $\|x\| \le \|x_0\|^\gamma$. On montre de même que, si $m/n < \gamma$, alors $\|x\| > \|x_0\|^{m/n}$, et donc que $\|x\| \ge \|x_0\|^\gamma$. Par suite, $\|x\| = \|x_0\|^\gamma$.
c) On a : $|x_0| > 1 \Leftrightarrow |x_0|^{-1} < 1 \Leftrightarrow |x_0^{-1}| < 1 \Leftrightarrow \|x_0^{-1}\| < 1 \Leftrightarrow \|x_0\|^{-1} < 1 \Leftrightarrow \|x_0\| > 1$; comme $|x_0| > 1$, on a $ln\ |x_0| > 0$, $ln\ \|x_0\| > 0$, et donc $r = (ln\ \|x_0\|)(ln\ |x_0|)^{-1} > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et γ tel que $|x| = |x_0|^\gamma$. On a : $\|x\| = \|x_0\|^\gamma = (|x_0|^r)^\gamma = (|x_0|^\gamma)^r = |x|^r$. L'égalité $\|x\| = |x|^r$ est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; comme elle est trivialement vraie pour $x = 0$, on a $\|\ \| = |\ |^r$.

Problème 4

1. *a*) On a : $i!-(k+1)! = i(i-1)!-(k+1)k! \ge ik!-(k+1)k! = k!(i-(k+1)) \ge i-(k+1)$.
b) On a clairement $0 < \alpha_k < \alpha$ et $\alpha-\alpha_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-i\,!} = 10^{-(k+1)!} \sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-(i\,!-(k+1)!)} \le 10^{-(k+1)!} \sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-(i-(k+1))} = 10^{-(k+1)!} \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i}$ $= 10^{-(k+1)!}\,\dfrac{10}{9} < 2\cdot 10^{-(k+1)!} = 2/10^{(k+1)!}$. De plus $\alpha < \alpha_1 + 2\cdot 10^{-2!} = 10^{-1!} + 2\cdot 10^{-2!} = 0{,}12 < 1$.
2. *a*) On a : $|P(\alpha)-P(\alpha_k)| \le \sup_{x\in[0,1]}|P'(x)|(\alpha-\alpha_k)$. Pour $x \in [0,1]$, $|P'(x)| = \left|\sum_{j=0}^{n} ja_jx^{j-1}\right| \le \sum_{j=0}^{n} j|a_j|x^{j-1}) \le \sum_{j=0}^{n} j|a_j| =$ C, et il vient donc : $|P(\alpha)-P(\alpha_k)| \le C(\alpha-\alpha_k) < 2C/10^{(k+1)!}$.
b) On a : $\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} 10^{-i!} = 10^{-k!}\sum_{i=1}^{k} 10^{k!-i!}$ et donc $\alpha_k^j = N_{k,j}/10^{j\cdot k!}$, où $N_{k,j} = \left(\sum_{i=1}^{k} 10^{k!-i!}\right)^j \in \mathbb{Z}$.
c) P n'ayant qu'un nombre fini de racines, on a $P(x) \ne 0$ pour x assez proche de α ; comme $\lim_{k\to\infty}\alpha_k = \alpha$, $P(\alpha_k) \ne 0$ pour k assez grand. Par ailleurs : $|P(\alpha_k)| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_{ij}N_{k,i}/10^{j\cdot k!}\right| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_jN_{k,j}10^{(n-i)k!}\right|/10^{n\cdot k!}$. Comme $|P(\alpha_k)| \ne 0$ et $\left|\sum_{j=0}^{n} a_jN_{k,j}10^{(n-j)k!}\right| \in \mathbb{N}$, on a $\left|\sum_{j=0}^{n} a_jN_{k,j}10^{(n-j)k!}\right| \ge 1$ et donc $|P(\alpha_k)| \ge 1/10^{n\cdot k!}$.
d) L'inégalité $1/10^{n\cdot k!} > 2C/10^{(k+1)!}$ équivaut à $10^{(k+1-n)k!} > 2C$, inégalité vérifiée pour k assez grand (puisque $10^{(k+1-n)k!}$ tend vers l'infini avec k). Pour k assez grand on a donc $|P(\alpha_k)| \ge 1/10^{n\cdot k!} > 2C/10^{(k+1)!} > |P(\alpha_k)|$: contradiction. Par suite, l'hypothèse faite sur α est fausse : α est transcendant.

Problème 5

1. Puisque AB = I, fg est l'application identique et on a en conséquence : $f(\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_ig(x_i)) = \Sigma_{1\le i\le n}\alpha_if(g(x_i)) = \Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i(fg)(x_i) = \Sigma_{1\le i\le n}\alpha_ix_i$. Si $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_ig(x_i) = 0$, alors $f(\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_ig(x_i)) = \Sigma_{1\le i\le n}\alpha_ix_i = 0$: puisque les vecteurs x_i forment une base, les coefficients α_i sont nuls, et les vecteurs $g(x_i)$ forment donc une base de E. Par suite, tout $y \in E$ s'écrit sous la forme $y = \Sigma_{1\le i\le n}\alpha_ig(x_i)$. Il vient : $(gf)(y) = g(f(y)) = g(\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_ix_i) = \Sigma_{1\le i\le n}\alpha_ig(x_i) = y$. L'endomorphisme gf est l'identité de E et on a donc BA = I.
2. On a : $M^2 = M \Rightarrow M^{-1}M^2 = M^{-1}M \Leftrightarrow M = I$. La matrice BA est idempotente puisque $(BA)^2 = (BA)(BA) = B(AB)A = BA$. Elle est en outre inversible puisque det BA = (det B)(det A) = (det A)(det B) = det AB = 1. Par suite BA = I.
3. L'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n est de dimension n^2. Par suite, la famille des n^2+1 matrices I, A, A^2, ..., A^{n^2} est linéairement dépendante : il existe des réels α_i non tous nuls tels que $\Sigma_{0\le i\le n^2}\alpha_iA^i = 0$. Soit k le premier entier i tel que $\alpha_i \ne 0$. Posons $\beta_i = -\alpha_i/\alpha_k$; l'égalité précédente s'écrit : $A^k = \beta_{k+1}A^{k+1} + \beta_{k+2}A^{k+2} + ... + \beta_{n^2}A^{n^2}$. En multipliant à droite par B^{k+1}, on obtient alors $B = \beta_{k+1}I+\beta_{k+2}A+...+\beta_{n^2}A^{n^2-k-1}$ et donc : $BA = (\beta_{k+1}I+\beta_{k+2}A+...+\beta_{n^2}A^{n^2-k-1})A = A(\beta_{k+1}I+\beta_{k+2}A+...+\beta_{n^2}A^{n^2-k-1}) = AB = I$.

Problème 6

1. Si $x < x'$, on a $\dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} < \dfrac{e^{-x'(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour tout $t \in [0,1]$. Les applications $t \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ étant continues, on a donc $\varphi(x) < \varphi(x')$: φ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. On a $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ = Arctan 1 = $\pi/4$, et $0 < \varphi(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt < e^{-x}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = e^{-x}\,(\pi/4)$, d'où il résulte que $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$.

2. On a $\varphi'(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-x(1+t^2)})dt = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt = -e^{-x}\int_0^1 e^{-xt^2}dt$. Pour $x > 0$ posons $t = u/\sqrt{x}$; il vient $\int_0^1 e^{-xt^2}dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{x}}\psi(\sqrt{x})$, d'où $\varphi'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\psi(\sqrt{x})$.

3. En posant $z = \sqrt{x}$ on a : $\int_\varepsilon^X \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\psi(\sqrt{x})dx = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{X}} \frac{e^{-z^2}}{z}\psi(z)(2zdz) = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{X}} e^{-z^2}\psi(z)dz = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{X}} \psi'(z)\psi(z)dz$. D'où $\varphi(\varepsilon)-\varphi(X) = -\int_\varepsilon^X \varphi'(x)dx = \int_\varepsilon^X \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\psi(\sqrt{x})dx = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{X}} (\psi^2(z))'dz = \psi^2(\sqrt{X})-\psi^2(\sqrt{\varepsilon})$. Lorsque X tend l'infini il vient $\varphi(\varepsilon) = J^2-\psi^2(\sqrt{\varepsilon})$; lorsque ε tend vers 0, on obtient alors $\varphi(0) = J^2$. Par suite, $J = \sqrt{\varphi(0)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème 7

1. Un calcul direct montre que $T(x)-x = (x_2+b_1)u_1+b_2u_2$ et $T^2(x)-x = (2x_2+2b_1+b_2)u_1+2b_2u_2$. Il vient donc : $\det(T(x)-x, T^2(x)-x) = \det(T(x)-x, (T^2(x)-x)-2(T(x)-x)) = \det(T(x)-x, b_2u_1) = \det(b_2u_2, b_2u_1) = -b_2^2\det(u_1,u_2) = -b_2^2 \neq 0$: les vecteurs sont donc linéairement indépendants. En particulier, pour tout x on a $T(x)-x \neq 0$, soit $T(x) \neq 0$: la condition (1) est satisfaite. Soit ensuite D une droite affine, et $x \in D$; si les points $T(x)$ et $T^2(x)$ appartenaient tous deux à D, les vecteurs $T(x)-x$ et $T^2(x)-x$ seraient linéairement dépendants, ce qui n'est pas le cas. Par suite, l'un au moins des deux points $T(x)$, $T(T(x))$ n'appartient pas à D : la condition (2) est satisfaite.
2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi(x)+b \neq x$, soit $\varphi(x)-x \neq b$: l'endomorphisme $\varphi-\mathrm{Id}$ n'est donc pas surjectif. Par suite, il n'est pas injectif, et il existe donc $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$, tel que $(\varphi-\mathrm{Id})(u) = 0$, soit $\varphi(u) = u$: φ admet 1 pour valeur propre.
b) Si l'on avait $b \in \mathbb{R}u_1$, on aurait $T(\mathbb{R}u_1) = \mathbb{R}\varphi(u_1)+b = \mathbb{R}u_1+b = \mathbb{R}u_1$, ce qui n'est pas le cas, d'après la condition (2). Par suite, $b \notin \mathbb{R}u_1$.
c) Les valeurs propres 1 et μ étant distinctes, les vecteurs propres u_1 et v forment une base de $\mathbb{R}^2$, et il en est de même de u_1 et $(1-\mu)v$: il existe donc $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $b = ru_1+s(1-\mu)v$. On a : $T(D) = \varphi(D)+b = \varphi(sv+\mathbb{R}u_1)+b = s\mu v+\mathbb{R}u_1+(ru_1+s(1-\mu)v) = sv+\mathbb{R}u_1 = D$. Le polynôme caractéristique de φ est un polynôme de degré 2 qui admet 1 pour racine : son autre racine est donc réelle, et, comme elle ne peut être différente de 1, 1 est une valeur propre double de φ, dont le polynôme caractéristique s'écrit donc $(\lambda-1)^2 = 0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a alors $(\varphi-\mathrm{Id})^2 = 0$.
d) Si l'on avait $\lambda = 0$, on aurait $\mu = 1$, et donc $\varphi = \mathrm{Id}$: T serait la translation de vecteur b, ce qui est impossible (puisque on aurait alors, par exemple , $T(\mathbb{R}b) = \mathbb{R}b$). Par suite, $\lambda \neq 0$. Posons $u_2 = \lambda^{-1}v$, de sorte que $\varphi(u_2) = u_1+\mu u_2$. Il vient alors : $(\varphi-\mathrm{Id})(u_2) = u_1+(\mu-1)u_2$, $(\varphi-\mathrm{Id})^2(u_2) = (\varphi-\mathrm{Id})(u_1+(\mu-1)u_2) = (\mu-1)(\varphi-\mathrm{Id})(u_2) = (\mu-1)(u_1+(\mu-1)u_2)$. L'égalité $(\varphi-\mathrm{Id})^2(u_2) = 0$ entraîne alors $\mu = 1$, de sorte que φ s'écrit dans $\{u_1,u_2\}$: $\varphi(x) = x_1\varphi(u_1)+x_2\varphi(u_2) = x_1u_1+x_2(u_1+u_2) = (x_1+x_2)u_1+x_2u_2$. La transformation T est donc bien de la forme indiquée.

Problème 8

1. a) S'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $[ab]_n = [a]_n[b]_n = [1]_n$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ab+kn = 1$, ce qui (d'après le théorème de Bézout) implique $(a,n) = 1$. Inversement, si $(a,n) = 1$, soit $b, k \in \mathbb{Z}$ tels que $ab+kn = 1$; on a alors $[a]_n[b]_n = [ab]_n = [ab+kn]_n = [1]_n$. D'où $\mathsf{U}_8 = \{[1]_8,[3]_8,[5]_8,[7]_8\}$, $\mathsf{U}_9 = \{[1]_9,[2]_9,[4]_9,[5]_9,[7]_9,[8]_9\}$. Dans U_8, on a $[3]_8^2 = [5]_8^2 = [7]_8^2 = [1]_8$: U_8 n'est donc engendré par aucun de ses éléments. En revanche, $\mathsf{U}_9 = \{[2]_9^k | 1 \le k \le 6\}$: U_9 est cyclique.
b) On a $\varphi(8) = 4$ et $\varphi(9) = 6$. Si p est premier, on a $(a,p) = 1$ pour $1 \le a \le p-1$, et donc $\varphi(p) = p-1$. Pour $n \ge 2$ et $a \in \mathbb{Z}$ tel que $(a,n) = 1$, on a $[a]_n \in \mathsf{U}_n$ et donc $[a]_n^{\varphi(n)} = [1]_n$. Comme $11 \in \mathsf{U}_{26}$ et $\varphi(26) = 12$, il vient $[11]_{26}^{12} = [1]_{26}$, soit $11^{12} \equiv 1 \pmod{26}$.
2. Soit $d = (k,m)$. Si $o(a^k) = m$, on a $(a^k)^{m/d} = (a^m)^{k/d} = e^{k/d} = e$, ce qui implique $d = 1$ (sinon $o(a^k) \le m/d < m$). Si $d = 1$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $uk+vm = 1$ et on a donc $a = a^{uk+vm} = (a^k)^u(a^m)^v = (a^k)^u$: a^k, qui engendre ainsi un générateur de G, engendre donc G. Le nombre de générateurs de G est ainsi égal au nombre d'entiers $k \in [1,m]$ premiers avec m, soit à $\varphi(m)$. Pour $G = \mathsf{U}_9$, on a $m = 6$: le nombre de générateurs est donc $\varphi(6) = 2$. On a vu que $[2]_9$ est un générateur de U_9 ; le second générateur est donc $[2]_9^5 = [5]_9$.

Problème 9

1. a) Si $a_n > 0$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante : elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée. On a $\sigma_{2i} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{2i+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{2i+1}} < 2$, et $\sigma_{2i+1} < \sigma_{2(i+1)} < 2$: σ a donc ses sommes partielles majorées et, par suite, converge. De même, on a $\tau_{2i} < \tau_{2i+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{3^{i+1}} <$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^i} < 2$: on conclut pareillement.

b) Pour $n \geq m$, on a $a_n \leq k^n$ et donc $s_n \leq s_{m-1} + k^m/(1-k)$: ses sommes partielles étant majorées, la série converge. Pour σ on a $a_n^{1/n} = 2^{-(1\pm 1/n)}$, et donc $a_n^{1/n} \leq 1/\sqrt{2}$ pour $n \geq 2$: σ converge. Pour τ, il vient $(b_{2i})^{1/(2i)} = 2^{-(1/2+1/(2i))} \leq 1/\sqrt{2}$ et $(b_{2i+1})^{1/(2i+1)} = 3^{-(i+1)/(2i+1)} = 3^{-(1/2+1/(4i+2))} \leq 1/\sqrt{3} < 1/\sqrt{2}$: τ converge.

2. Pour $n \geq m$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$, et donc $(\frac{a_n}{a_{n-1}}...\frac{a_1}{a_0})^{1/n} \leq (\frac{a_m}{a_{m-1}}...\frac{a_1}{a_0})^{1/n} k^{(1-(m-1)/n)}$, majorant qui tend vers k ; si $k' \in\ ]k,1[$, on a donc $(\frac{a_n}{a_{n-1}}...\frac{a_1}{a_0})^{1/n} \leq k'$ pour n assez grand. En outre on a, pour n assez grand, $a_n^{1/n} = a_0^{1/n}(\frac{a_n}{a_{n-1}} ... \frac{a_1}{a_0})^{1/n} \leq a_0^{1/n} k'$, majorant qui tend vers k' ; si $k'' \in\ ]k',1[$, on a donc $a_n^{1/n} \leq k''$ pour n assez grand. Par suite, la série de t.g. a_n converge. Pour σ, on a $\frac{a_{2i}}{a_{2i-1}} = 1/8$ mais aussi $\frac{a_{2i+1}}{a_{2i}} = 2$: on ne peut pas conclure. Pour τ, on a $\frac{b_{2i+1}}{b_{2i}} = (2/3)^{i+1} < 1$, mais $\frac{b_{2i}}{b_{2i-1}} = 3^i/2^{i+1}$ tend vers l'infini avec i : on ne peut pas davantage conclure.

3. On a $(\frac{a_n}{a_{n-1}}...\frac{a_1}{a_0})^{1/n} \leq \frac{1}{n}(\frac{a_n}{a_{n-1}}+...+\frac{a_1}{a_0}) \leq k$ pour n assez grand. Comme précédemment on a alors $a_n^{1/n} \leq k'$ pour $k' \in\ ]k,1[$ et n assez grand : la série converge. Pour σ, on a $\frac{1}{n}(\frac{a_n}{a_{n-1}}+...+\frac{a_1}{a_0}) = \frac{p+1}{2p+1}\times 2+\frac{p}{2p+1}\times 2^{-3}$ pour $n = 2p+1$, ce qui tend vers 17/16, et $\frac{1}{n}(\frac{a_n}{a_{n-1}}+...+\frac{a_1}{a_0}) = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times 2^{-3}$ pour $n = 2p$, ce qui est égal à 17/16 : le critère ne permet pas de conclure. Pour τ, on a, pour $n = 2p$, $\frac{1}{n}(\frac{b_n}{b_{n-1}}+...+\frac{b_1}{b_0}) \geq \frac{1}{4p}(3/2)^p$, ce qui tend vers l'infini avec p : là encore le critère est muet.

Problème 10

1. a) Les compacts A et B étant bornés, il existe un disque ouvert D contenant $A\cup B$. Si ρ est le rayon de D, on a $d(x,y) < 2\rho$ pour tout $(x,y) \in A\cup B$. En particulier on a $d(x,y) < 2\rho$ pour $x \in A$ et $y \in B$, et donc $A \subseteq V_{2\rho}(B)$ et $B \subseteq V_{2\rho}(A)$. L'ensemble $H(A,B)$ est minoré (par 0) et non vide (il contient 2ρ) : il possède donc une borne inférieure $h(A,B)$.

b) Quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $V_\varepsilon(A) \supseteq A$, et donc $\varepsilon \in H(A,A)$; par suite, $h(A,A) = 0$. Inversement, supposons que $h(A,B) = 0$. Soit $x \in A$; pour tout $\varepsilon > 0$, on a $x \in V_\varepsilon(B)$, et donc $D(x,\varepsilon)\cap B \neq \emptyset$. Puisque $E\backslash B$ est ouvert, on a donc $x \in B$. Il en résulte que $A \subseteq B$; par symétrie, on a de même $B \subseteq A$, et donc, au total, $A = B$.

c) Pour $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $d(x,y) < h(A,B)+\varepsilon$; de même il existe $z \in C$ tel que $d(y,z) < h(B,C)+\varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \in A$, il existe $z \in C$ tel que $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z) < h(A,B)+h(B,C)+2\varepsilon$. On a donc $A \subseteq V_r(C)$, où $r = h(A,B)+h(B,C)+2\varepsilon$. Par symétrie, on a aussi $C \subseteq V_r(A)$, et donc $h(A,C) \leq h(A,B)+h(B,C)+2\varepsilon$. Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que $h(A,C) \leq h(A,B)+h(B,C)$.

d) D'après la définition de h, il est clair en outre que, pour tout $(A,B) \in K^2$, $h(A,B) = h(B,A)$. L'application h de K^2 dans $\mathbb{R}_+$ est donc une distance sur K.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $F_n = A_n\cap(E\backslash V_\varepsilon(A))$: $V_\varepsilon(A) = \bigcup_{x\in A}D(x,\varepsilon)$ étant ouvert, F_n est fermé. Par ailleurs, puisque $A \subseteq V_\varepsilon(A)$, $\bigcap_{n\geq 1}F_n = (\bigcap_{n\geq 1}A_n)\cap(E\backslash V_\varepsilon(A)) = A\cap(E\backslash V_\varepsilon(A)) = \emptyset$. Il existe donc m tel que $\bigcap_{1\leq n\leq m}F_n = \emptyset$. Comme la suite $(F_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, on a $F_m = A_m\cap(E\backslash V_\varepsilon(A)) = \emptyset$, et donc $A_m \subseteq V_\varepsilon(A)$. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante, on a $A_n \subseteq V_\varepsilon(A)$ pour tout $n \geq m$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $A \subseteq A_n \subseteq V_\varepsilon(A_n)$. Par suite, $h(A_n,A) \leq \varepsilon$ pour $n \geq m$. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ converge donc vers A au sens de h.

Problème 11

1. *a*) Pour tout $x \in [0,1]$ on a : $0 \leq \frac{x^n}{n!}e^{1-x} \leq \frac{e}{n!}$. En intégrant entre 0 et 1 on obtient : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$

b) On a $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx = e-1$. Pour $n \geq 1$ on a $\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^n}{n!}e^{1-x}\right) = \frac{x^n}{n!}e^{1-x} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-x}$ et donc, en intégrant entre 0 et 1, $-\frac{1}{n!} = I_n - I_{n-1}$, soit $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$. L'égalité $I_n = e - u_n$ est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour $n-1$, alors elle est vraie pour n : $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!} = e - (1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{(n-1)!}) - \frac{1}{n!} = e - (1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}) = e - u_n$. On a donc $I_n = e - u_n$ pour tout entier n.

c) L'encadrement $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$ entraîne que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. On a donc : $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (e-I_n) = e$.

2. *a*) Il existe $p, q \in \mathbb{N}$, $q > 0$, tels que $\alpha = \frac{p}{q}$: par suite, $q\alpha = p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq q$, on a alors $k!\alpha = \frac{k!}{q}(q\alpha) \in \mathbb{N}$, et donc $[k!\alpha] = k!\alpha$.

b) On a : $k!\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + ... + \frac{1}{(k+m)!}\right) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + ... + \frac{1}{(k+1)(k+2)...(k+m)}$

$$\leq 1 + \frac{1}{k+1} + \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{k+1}\right)^m - 1 < \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} - 1 = \frac{k+1}{k} - 1 = \frac{1}{k}.$$

c) Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n > k \geq 2$. Posons $m = n-k$, de sorte que $u_n = u_k + \frac{1}{(k+1)!} + ... + \frac{1}{(k+m)!}$. D'après 2 *b*) il vient alors : $k!u_n < k!u_k + \frac{1}{k} \leq k!u_k + 0{,}5$. D'où, en faisant tendre n vers l'infini : $k!e \leq k!u_k + 0{,}5$. Comme $u_k < e$, on a $k!u_k < k!e \leq k!u_k + 0{,}5$ et donc $[k!e] = k!u_k < k!e$. Si e était rationnel, pour tout entier k assez grand, on aurait $[k!e] = k!e$: contradiction.

Problème 12

1. La droite d' n'étant pas parallèle à d, on a $d'\cap d \neq \varnothing$: il existe donc un point A $\in d'\cap d$. S'il existait B $\neq$ A tel que B $\in d'\cap d$, on aurait, d'après A_2, $d' = d = (AB)$, et donc $d'//d$. D'où l'unicité.
2. La relation $d'//d$ est clairement réflexive ($d//d \Leftrightarrow d = d$) et symétrique ($d'//d \Leftrightarrow d' = d$ ou $d'\cap d = \varnothing \Leftrightarrow d = d'$ ou $d\cap d' = \varnothing \Leftrightarrow d//d'$). Soit $d, d', d'' \in \mathbf{D}$ telles que $d//d'$ et $d'//d''$. Si $d\cap d'' = \varnothing$, ona $d//d''$; si d et d'' ont un point commun A, on a $d, d'' \in \mathbf{D}(A)$ avec $d//d'$ et $d''//d'$, et donc, d'après A_3, $d = d''$, soit $d//d''$. La relation de parallélisme est donc transitive.
3. D'après A_2, φ est bien définie sur d (si M $\in d$, alors M $\neq$ A et (AM) existe et est unique). Comme $\varphi(M)$ et d ont en commun le point M, on a $\varphi(M) \neq [A,d]$ et donc $\varphi(M) \in \mathbf{D}(A)\backslash\{[A,d]\}$. D'après A_2 encore, φ est injective : si M, N $\in d$, M $\neq$ N, et si $\varphi(M) = \varphi(N)$, soit (AM) = (AN), on a (AM) = (MN) = d et donc A $\in d$, en contradiction avec l'hypothèse que A $\in \prod\backslash d$. Si $d' \in \mathbf{D}(A)\backslash\{[A,d]\}$, soit B $\in d'\cap d$; puisque B $\in d$ et A $\notin d$, on a B $\neq$ A et donc d' = (AB) : φ est surjective.
4. D'après A_3, ψ est bien définie. Si $d, d' \in \mathbf{D}(B)$ et si $[A,d] = [A,d']$, on a $d//[A,d] = [A,d']//d'$ et donc $d//d'$; d'après A_3, $d = d'$, et ψ est injective sur $\mathbf{D}(B)$. Si $d' \in \mathbf{D}(A)$, soit $d = [B,d']$; d'après A_3, on a $[A,d] = d'$: ψ est surjective.
5. D'après A_1 il existe un point A $\notin d$. D'après la question 3, $\mathbf{D}(A)\backslash\{[A,d]\}$ contient exactement n droites ; $\mathbf{D}(A)$ contient donc exactement n+1 droites. Soit un point B $\neq$ A ; d'après la question 4, $\mathbf{D}(B)$ a même cardinal que $\mathbf{D}(A)$, soit n+1. Soit alors une droite d' et un point A' $\notin d'$; comme d' est équipotent à $\mathbf{D}(A')\backslash\{[A',d']\}$, d' contient $(n+1)-1$ points, soit n points. Soit enfin A un point quelconque ; d'après A_2, tout point distinct de A appartient à une droite et une seule contenant A. Comme chaque droite qui contient A contient exactement $n-1$ points distincts de A, $\prod$ contient $(n+1)(n-1)+1$ points, soit n^2 points.

Problème 13

1. *a*) Tout complexe s'écrivant d'une manière unique sous la forme $a+bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $\{1,i\}$ est une base de $\mathbb{C}$, et donc $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$. Si $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $a+b\alpha = 0$, où $a, b \in \mathbb{R}$, on a $b = 0$ (sinon $\alpha = -a/b \in \mathbb{R}$) et donc $a = 0$: ainsi, 1 et α sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Comme $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$, $\{1,\alpha\}$ est une base de $\mathbb{C}$, et tout complexe s'écrit donc d'une manière unique sous la forme $a+b\alpha$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Soit $\alpha \in K\backslash\mathbb{R}$. K est inclus dans $\mathbb{C}$ et contient le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par $\{1,\alpha\}$, soit $\mathbb{C}$: par suite, $K = \mathbb{C}$.

2. *a*) Si la famille $(\alpha^i)_{0\le i\le n}$ était libre dans K, on aurait $\dim_{\mathbb{R}} K \ge n+1$: cette famille est donc liée, et il existe a_0, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $a_0+a_1\alpha+...+a_n\alpha^n = 0$. Posons $P(X) = a_0+a_1X+...+a_nX^n$; on a $P \in I_\alpha$, et donc $I_\alpha \ne \emptyset$. Soit alors $P_0 \in I_\alpha$ de degré minimal, et $P_1 = P_0/\lambda$, où λ est le coefficient dominant de P_0 : il est clair que $P_1 \in I_\alpha$, est unitaire et de degré minimal (puisque degré P_1 = degré P_0). Si $P_2 \ne P_1$ est un autre polynôme répondant à la question, on a $P_2-P_1 \in I_\alpha$, avec degré P_2-P_1 < degré P_1 : contradiction. D'où l'unicité.

b) Si on avait $Q(\alpha) = a_0+a_1\alpha+...+a_{m-1}\alpha^{m-1} = 0$ avec a_0, a_1, ..., $a_{m-1} \in \mathbb{R}$ non tous nuls, on aurait $Q \in I_\alpha$ avec degré Q < degré $M_{\alpha,\mathbb{R}}$: contradiction. La partie $\{1,\alpha,...,\alpha^{m-1}\}$ est donc libre et engendre un sous-espace vectoriel de K de dimension *m*. Comme $\dim_{\mathbb{R}} K = n$, on a $m \le n$.

c) Si degré $M_{\alpha,\mathbb{R}} = 1$, soit $M_{\alpha,\mathbb{R}}(X) = a_0+X$; l'égalité $a_0+\alpha = 0$ implique $\alpha = -a_0 \in \mathbb{R}$. Si degré $M_{\alpha,\mathbb{R}} = 2$, soit $M_{\alpha,\mathbb{R}}(X) = a_0+a_1X+X^2$. On a : $\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + a_1/2)^2 + (a_0-a_1^2/4) = 0$. Comme $M_{\alpha,\mathbb{R}}$ n'a pas de racines réelles (sinon α serait racine d'un polynôme de degré 1), on a $a_0-a_1^2/4 > 0$. Posons $b = -a_1/2$, $c = \sqrt{a_0-a_1^2/4}$, $\beta = (\alpha-b)/c$. On a $\beta^2 = -1$, et donc $\beta = \pm i$, de sorte que $\alpha = b\pm ic \in \mathbb{C}$.

d) Si pour tout $\alpha \in K$ on avait degré $M_{\alpha,\mathbb{R}} \le 2$, on aurait $K \subseteq \mathbb{C}$ et donc $\dim_{\mathbb{R}} K \le 2$. Si $\dim_{\mathbb{R}} K = 3$, il existe donc $\gamma \in K$ tel que degré $M_{\gamma,\mathbb{R}} \ge 3$. Comme degré $M_{\gamma,\mathbb{R}} \le 3$, on a degré $M_{\gamma,\mathbb{R}} = 3$. Le polynôme $M_{\gamma,\mathbb{R}}$, de degré 3, s'annule sur $\mathbb{R}$ (d'après la propriété des valeurs intermédiaires), et il existe donc u, v, $w \in \mathbb{R}$ tels que $M_{\gamma,\mathbb{R}}(X) = (X-u)(X^2+vX+w)$. Par suite, γ annule un polynôme à coefficients réels de degré 1 ou 2 : contradiction. En conséquence, il n'est pas possible que $\dim_{\mathbb{R}} K = 3$.

Problème 14

1. Pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma([0,t])$ est l'arc de cercle centré au point d'affixe -1, ayant pour extrémités les points d'affixe 0 et $e^{it}-1$, et correspondant à un angle au centre de *t* radian. Il en résulte en particulier que $L_t = t$. Par ailleurs on a $|\gamma(t)|^2 = (e^{it}-1)(e^{-it}-1) = 2-(e^{it}+e^{-it}) = 2(1-\cos t) = 4\sin^2(t/2)$, et donc $|\gamma(t)| = 2\sin(t/2)$. Il vient ainsi $L_t/|\gamma(t)| = (t/2)/\sin(t/2)$, ce qui tend vers 1 quand *t* tend vers 0.

2. *a*) L'application γ est de classe C^1 sur $]0,1]$. On a $|\gamma(t)| = |e^{-1/t}\, e^{\alpha i/t}| = e^{-1/t}$, ce qui tend vers 0 quand *t* tend vers 0 : γ est donc continue en 0. Posons ensuite $u = 1/t$, de sorte que $u' = -1/t^2$. On a, pour $t \in]0,1]$, $\gamma'(t) = (e^{-u(1-\alpha i)})' = -u'(1-\alpha i)e^{-u(1-\alpha i)} = -u'(1-\alpha i)e^{-u}e^{\alpha iu}$; il vient ainsi $|\gamma'(t)| = -u'\sqrt{1+\alpha^2}\, e^{-u}$, ce qui tend vers 0 quand *t* vers 0. Comme $|(\gamma(t)-\gamma(0))/(t-0)| = |\gamma(t)/t| = ue^{-u}$ tend vers 0 quand *t* tend vers 0, γ est dérivable en 0 et $\gamma'(0) = 0$. Par suite, γ' est continue en 0, et γ est de classe C^1 sur $[0,1]$.

b) L'application $t \mapsto \gamma'(t)$ admet sur $[0,1]$ la primitive φ définie par $\varphi(t) = \sqrt{1+\alpha^2}\, e^{-u}$ pour $t \in]0,1]$, et $\varphi(0) = 0$. On a $L_t = \int_0^t |\gamma'(x)|dx = \varphi(t)-\varphi(0) = \varphi(t) = \sqrt{1+\alpha^2}\, e^{-1/t}$.

c) On a $L_t/|\gamma(t)| = \sqrt{1+\alpha^2}$. En particulier, $L_t/|\gamma(t)|$ tend vers $\sqrt{1+\alpha^2}$ quand *t* tend vers 0. Pour $\alpha \ne 0$, $\sqrt{1+\alpha^2} > 1$. Il est donc faux que, en général, le rapport $\frac{\text{longueur de l'arc}}{\text{longueur de la corde}}$ tende vers 1.

Problème 15

1. L'égalité $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$ équivaut à $bc = ad$. La fraction $\dfrac{a}{b}$ étant irréductible, l'entier *b* est premier avec *a* ; comme il divise *ad* (= *bc*), il divise *d*. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel $d = kb$. L'égalité $bc = ad$ s'écrit alors $bc = kab$, ce qui équivaut à $c = ka$.

2. D'après le résultat de la question 1, $\dfrac{a}{b}$ est décimal si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tels que *kb* soit de la forme 10^n. S'il en est ainsi, tout diviseur premier de *b* est un diviseur premier de 10, et *b* s'écrit donc sous la forme $2^\alpha 5^\beta$, où α, $\beta \in \mathbb{N}$. Inversement, si $b = 2^\alpha 5^\beta$, où α, $\beta \in \mathbb{N}$, soit $k = 2^\beta 5^\alpha$ et $n = \alpha+\beta$. Il vient : $kb = (2^\beta 5^\alpha)(2^\alpha 5^\beta) = 2^{\alpha+\beta}5^{\alpha+\beta} = 10^{\alpha+\beta} = 10^n$.

3. a) Pour tout $n \ge 0$, l'existence et l'unicité de q_n et r_n résultent trivialement du théorème de la division euclidienne : les suites $(q_n)_{n\ge0}$ et $(r_n)_{n\ge0}$ sont donc bien définies. Si l'on avait $q_n \ge 10$, l'égalité $10r_{n-1} = bq_n + r_n$ serait incompatible avec l'inégalité $r_{n-1} < b$. Si l'on remplace *a* et *b* par *ka* et *kb*, on obtient, en multipliant par *k* : $ka = kbq_0+kr_0$ & $kr_0 < kb$, $10kr_0 = kbq_1+kr_1$ & $kr_1 < kb$, $10kr_1 = kbq_2+kr_2$ & $kr_2 < kb$, ..., $10kr_{n-1} = kbq_n+kr_n$ & $kr_n < kb$, ... Les suites $(q_n)_{n\ge0}$ et $(r_n)_{n\ge0}$ sont donc remplacées par les suites $(q_n)_{n\ge0}$ et $(kr_n)_{n\ge0}$.

b) Comme $a < b$, on a $q_0 = 0$ et $r_0 = a$. En remplaçant a par $D = ka$ et b par $10^n = kb$, où $k \in \mathbb{N}$, on a alors : $10kr_0 = 10D = 10(10^{n-1}d_1+10^{n-2}d_2+...+10d_{n-1}+d_n) = 10^n d_1 + (10^{n-1}d_2 + 10^{n-2}d_3 +...+ 10^2 d_{n-1} + 10d_n)$. On a : $10^{n-1}d_2+10^{n-2}d_3+...+10^2d_{n-1}+10d_n \leq 9\,(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10) = 10^n-10 < 10^n$; par suite, on a $q_1 = d_1$ et $kr_1 = 10^{n-1}d_2+10^{n-2}d_3+...+10^2d_{n-1}+10d_n$. Supposons plus généralement que, pour $i < n-1$, on a $q_i = d_i$ et $kr_i = 10^{n-1}d_{i+1}+10^{n-2}d_{i+2}+...+10^i d_n$. Il vient alors : $10kr_i = 10^n d_{i+1}+10^{n-1}d_{i+2}+...+10^{i+1}d_n = 10^n d_{i+1} + (10^{n-1}d_{i+2}+...+10^{i+1}d_n)$. Comme $10^{n-1}d_{i+2} +...+10^{i+1}d_n < 10^n$, on a $q_{i+1} = d_{i+1}$ et $kr_{i+1} = 10^{n-1}d_{i+2}+...+10^{i+1}d_n$. Ainsi pour tout $i \leq n-1$ on a $q_i = d_i$ et $kr_i = 10^{n-1}d_{i+1}+10^{n-2}d_{i+2}+...+10^i d_n$. On a en particulier $kr_{n-1} = 10^{n-1}d_n$, et donc $10kr_{n-1} = 10^n d_n$. Par suite, $q_n = d_n$ et $kr_n = 0$, soit $r_n = 0$. Une récurrence immédiate montre que l'on a alors $q_i = 0$ et $r_i = 0$ pour tout $i \geq n+1$.

c) Si $r_n = 0$, il vient :

$$\begin{array}{c|l} \times 10^{n-1} & 10r_0 = bq_1 + r_1 \\ \times 10^{n-2} & 10r_1 = bq_2 + r_2 \\ \times 10^{n-3} & 10r_2 = bq_3 + r_3 \\ \ldots & \quad\ldots \\ \times 10^1 & 10r_{n-2} = bq_{n-1} + r_{n-1} \\ \times 10^0 & 10r_{n-1} = bq_n \end{array}$$

En sommant les égalités obtenues après multiplication par les coefficients indiqués à droite, on obtient : $10^n r_0 = bq_1 10^{n-1}+bq_2 10^{n-2}+...+10bq_{n-1}+bq_n = b(10^{n-1}q_1+10^{n-2}q_2+...+10q_{n-1}+q_n) = bD$. Comme $r_0 = a$, il vient $\frac{a}{b} = \frac{D}{10^n}$.

Problème 16

1. Il est clair que $\mathbf{A}(\mathrm{X}) \subset \mathbb{Q}$ et que $\mathbf{A}(\mathbf{P}) = \mathbb{Q}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme $1 \in \overline{\mathrm{X}}$ on a $n = \frac{n}{1} \in \mathbf{A}(\mathrm{X})$. Par suite $\mathbb{Z} \subset \mathbf{A}(\mathrm{X})$. Soit ensuite $p \in \mathrm{X}$. On a $p > 1$ et donc $\frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}$. Comme $\frac{1}{p} \in \mathbf{A}(\mathrm{X})$, $\mathbb{Z}$ est strictement inclus dans $\mathbf{A}(\mathrm{X})$. Soit enfin $n, n' \in \mathbb{Z}$ et $m, m' \in \overline{\mathrm{X}}$. On a : $\frac{n}{m} - \frac{n'}{m'} = \frac{nm'-n'm}{mm'}$ et $\frac{n}{m}\frac{n'}{m'} = \frac{nn'}{mm'}$. Comme $nm'-n'm, nn' \in \mathbb{Z}$ et $mm' \in \overline{\mathrm{X}}$, la différence et le produit de deux éléments de $\mathbf{A}(\mathrm{X})$ appartiennent à $\mathbf{A}(\mathrm{X})$: $\mathbf{A}(\mathrm{X})$ est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{Q}$.

2. a) Comme $ad = bc$, a divise bc ; a étant premier avec b, il divise c. Pour les mêmes raisons c divise a. Comme a et c sont ≥ 1, on a $a = c$. Il en résulte que $b = d$.

b) Soit $n, n' \in \mathbb{Z}$, $m \in \overline{\mathrm{X}}$, $m' \in \overline{\mathrm{Y}}$, avec $(n,m) = (n',m') = 1$. Si $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ alors $n = n'$ et $m = m'$. Si $m = m' > 1$, il existe $p \in \mathbf{P}$ qui divise m et m'. D'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, on a alors $p \in \mathrm{X}$ et $p \in \mathrm{Y}$, en contradiction avec l'hypothèse que $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing$. Par suite, $m = m' = 1$, et donc $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \in \mathbb{Z}$.

c) On a $\frac{1}{5}, \frac{1}{7} \in \mathbf{A}(\{5,7\})$ et donc $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \in \mathbf{A}(\{5,7\})$. Par ailleurs $\frac{1}{18} \in \mathbf{A}(\{2,3\})$. Comme $\{5,7\} \cap \{2,3\} = \varnothing$, on a $\mathbf{A}(\{5,7\}) \cap \mathbf{A}(\{2,3\}) = \mathbb{Z}$, et donc $\frac{1}{18} \notin \mathbf{A}(\{5,7\})$. Ainsi $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ ne peut être égal à $\frac{1}{18}$.

3. a) Il est clair que $\{ \frac{n}{q^k} \,/\, n \in \mathbb{Z} \;\&\; k \in \mathbb{N} \} \subset \mathbf{A}(\mathrm{X})$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \overline{\mathrm{X}}$. Il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{N}$ tels que $m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_\ell^{\alpha_\ell}$. Soit $\alpha = \max \{ \alpha_i \,/\, 1 \leq i \leq \ell \}$. On a : $\frac{n}{m} = \frac{n\,p_1^{\alpha-\alpha_1}p_2^{\alpha-\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha-\alpha_n}}{q^\alpha} \in \{ \frac{n}{q^k} \,/\, n \in \mathbb{Z} \;\&\; k \in \mathbb{N} \}$. D'où l'égalité demandée.

b) On a : $\frac{a}{b} \in \mathbb{D} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbf{A}(\{2,5\})$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{a}{b} = \frac{n}{2^\alpha 5^\beta}$ avec $\frac{n}{2^\alpha 5^\beta}$ irréductible. Il en résulte que $a = n$ et $b = 2^\alpha 5^\beta$.

Problème 17

I. On a : $k\varepsilon \leq x < (k+1)\varepsilon \Leftrightarrow k \leq \frac{x}{\varepsilon} < k+1$. Il vient : $\frac{x}{\varepsilon} = 113\,\pi =_c 354{,}9999699$ et donc $k = 354$: la valeur approchée par défaut à $\frac{1}{113}$ de π est $\frac{354}{113}$.

II. 1. Comme $k_n \leq x\cdot a^n$, on a $ak_n \leq x\cdot a^{n+1}$ et donc $ak_n \leq \mathrm{E}(x\cdot a^{n+1}) = k_{n+1}$. D'où $\dfrac{k_n}{a^n} = \dfrac{ak_n}{a^{n+1}} \leq \dfrac{k_{n+1}}{a^{n+1}}$: la suite $\left(\dfrac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq 0}$ est croissante. Comme $\left|x - \dfrac{k_n}{a^n}\right| = x - \dfrac{k_n}{a^n} < \dfrac{k_n+1}{a^n} - \dfrac{k_n}{a^n} = a^{-n} \to 0$, cette suite converge vers x.

2. a) Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq$ que $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = s_n$. Pour $n = 1$ on a $\sum\limits_{i=1}^{1} u_i = u_1 = s_1$. Supposons l'égalité vraie pour n ; on a alors : $\sum\limits_{i=1}^{n+1} u_i = s_n + u_{n+1} = s_n + (s_{n+1}–s_n) = s_{n+1}$, cqfd.

b) On a $k_1 = \mathrm{E}(x\cdot a)$. Comme $0 \leq x < 1$, on a $0 \leq x\cdot a < a$ et donc $0 \leq \mathrm{E}(x\cdot a) \leq a–1$. D'où $\lambda_1 = k_1 = \mathrm{E}(x\cdot a) \in \mathbb{N}\cap[0;a–1]$. Pour tout $n \geq 1$, on a $\dfrac{k_{n+1}}{a^{n+1}} \leq x < \dfrac{k_n+1}{a^n} = \dfrac{ak_n+a}{a^{n+1}}$ et donc $k_{n+1} < ak_n+a$. D'où $\lambda_{n+1} = k_{n+1}–ak_n < a$. Puisque $\dfrac{\lambda_1}{a} = \dfrac{k_1}{a}$ et, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{\lambda_{n+1}}{a^{n+1}} = \dfrac{k_{n+1}}{a^{n+1}} - \dfrac{ak_n}{a^{n+1}} = \dfrac{k_{n+1}}{a^{n+1}} - \dfrac{k_n}{a^n}$ la série de terme général $\dfrac{\lambda_n}{a^n}$ $(n \geq 1)$ admet $\left(\dfrac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq 1}$ pour suite des sommes partielles, en sorte que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_n}{a^n} = x$. Si l'on avait $\lambda_n = a–1$ pour tout $n > m$, on aurait $x = \sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{\lambda_n}{a^n} + \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \dfrac{\lambda_n}{a^n} = \dfrac{k_m}{a^m} + \dfrac{a–1}{a^{m+1}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{k_m}{a^m} + \dfrac{a–1}{a^{m+1}}\dfrac{a}{a–1} = \dfrac{k_m}{a^m} + \dfrac{1}{a^m} = \dfrac{k_m+1}{a^m}$: contradiction.

3. On a : $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu_n}{a^n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a–1}{a^n} = (a–1)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^n} = 1$: la série de terme général $\dfrac{\mu_n}{a^n}$ $(n \geq 1)$ converge vers un réel $y \in [0;1[$. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu_n}{a^n} = x$, on a, pour tout $n \geq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\mu_i}{a^i} \leq x < \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\mu_i}{a^i} + \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \dfrac{a–1}{a^i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\mu_i}{a^i} + \dfrac{1}{a^n}$, et donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i\cdot a^{n–i} \leq x\cdot a^n < \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i\cdot a^{n–i} + 1$. Il en résulte que, pour tout $n \geq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i\cdot a^{n–i} = k_n$. En particulier, $\mu_1 = \sum\limits_{i=1}^{1} \mu_i\cdot a^{1–i} = k_1 = \lambda_1$. En outre, pour tout $n \geq 1$, il vient $\lambda_{n+1} = k_{n+1}–ak_n = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i\cdot a^{n+1–i} – a \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i\cdot a^{n–i} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i\cdot a^{n+1–i} – \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i\cdot a^{n+1–i} = \mu_{n+1}$.

4. D'après la question précédente, si l'on avait $y = f(n)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, μ_n serait le n–ième chiffre du développement de $f(n)$ en base 10, ce qui n'est pas le cas. Par suite, $y \notin f(\mathbb{N})$, et f n'est donc pas surjective. L'ensemble $[0;1[$ n'est donc pas dénombrable.

Problème 18

1. L'application f étant continue et strictement décroissante, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < f(n)$, et donc $\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = s_n$; d'où $b_n = s_n–\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x > 0$. Comme on a par ailleurs $c_n = s_n–\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x > s_n–\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = b_n$, il vient finalement : $0 < b_n < c_n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_{n+1}–b_n = f(n+1)–\int_{n+1}^{n+2} f(x)\mathrm{d}x > 0$ et $c_{n+1}–c_n = f(n+1)–\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < 0$. De plus $c_n–b_n = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < f(n)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} f(x) = 0$ et $c_n–b_n > 0$, il vient $\lim_{n\to+\infty} (c_n–b_n) = 0$. La suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée (par c_1 par exemple) : elle est donc convergente. De même $(c_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée (par b_1) : elle converge. Soit $\gamma_{f–}$ et γ_{f+} les limites de $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(c_n)_{n\geq 1}$; on a : $\gamma_{f+}–\gamma_{f–} = \lim_{n\to+\infty} (c_n–b_n) = 0$, et donc $\gamma_{f+} = \gamma_{f–}$. D'où l'existence de γ_f. L'unicité découle de l'unicité de la limite.

2. a) L'encadrement $b_n < \gamma_f < c_n$, soit $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k – \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < \gamma_f < \sum\limits_{k=1}^{n} a_k – \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x$, entraîne que, d'une part, $\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x < \sum\limits_{k=1}^{n} a_k – \gamma_f$, majoration qui implique que, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ converge, il en est de même de $\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x$, et d'autre

part $\sum_{k=1}^{n} a_k < \gamma_f+\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$, majoration qui montre que si $\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$ converge, il en va de même de $\sum_{k=1}^{n} a_k$. On a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

b) L'égalité $b_n = s_n - \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$ donne, par passage à la limite, $\gamma_f = s - \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, soit encore $s = \gamma_f+\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Il vient ainsi, d'une part $s-s_n < (\gamma_f+\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x)-(\gamma_f+\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x) = \int_n^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, d'autre part $s-s_n > (\gamma_f+\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x) - (\gamma_f+\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x) = \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. On a donc bien : $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < s-s_n < \int_n^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

3. a) On a $\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x = \ln n$. L'encadrement $b_n < \gamma < c_n$, soit $s_n-\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < \gamma < s_n-\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x$, s'écrit donc : $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) < \gamma < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$. Il vient de plus : $c_n-b_n = \ln(n+1)-\ln n = \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$.

b) On a $\alpha_1 = b_1 = 1-\ln 2 = \frac{1}{1} - \ln(1+\frac{1}{1}) = \varphi(1)$ et, pour $n \geq 2$, $\alpha_n = b_n-b_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \varphi(n)$. Par ailleurs, pour $n \geq 2$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = b_1 + (b_2-b_1) + \ldots + (b_n-b_{n-1}) = b_n$. Il vient en outre $\varphi'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0$ et $\varphi(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})] = \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}) \sim \frac{1}{2x^2}$: φ est donc strictement décroissante et tend vers 0 à l'infini. D'après les résultats de la question 2 b), on a : $\int_{n+1}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x < \sigma-\sigma_n < \int_n^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$. Or $\sigma_n = b_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\sigma = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \gamma$. Il vient ainsi : $b_n+\int_{n+1}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x < \gamma < b_n+\int_n^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$.

c) On a : $\Phi'(x) = -\ln(1+\frac{1}{x}) - (x+1)\,\frac{-1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x}) = \varphi(x)$. Il vient : $-\Phi(n) = (n+1)\ln(1+\frac{1}{n}) = (n+1)[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})] = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. D'où : $v_n-u_n = \int_n^{n+1} \varphi(x)\mathrm{d}x = \Phi(n+1)-\Phi(n) = \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) - \left(1 + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{6(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{2n+1}{6n^2(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2n(n+1)} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{2n^2}$.

Problème 19

1. On a : $f(\sqrt{3}-2) = \frac{2(\sqrt{3}-2)+1}{1-(\sqrt{3}-2)} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3}-3)(3+\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Comme $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, on a $0{,}732 < \sqrt{3}-1 < 0{,}733$, d'où $0{,}366 < \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 0{,}3665$, soit finalement $0{,}3660 < f(\sqrt{3}-2) < 0{,}3665$.

2. On a tout d'abord $f_1(x) = \frac{3}{3-x} - 2$: f_1 est donc strictement croissante sur I ; en vertu de la continuité de f_1, il vient alors : $f_1(\mathrm{I}) =]f_1(1{,}732);f_1(1{,}733)[=]\frac{116}{317};\frac{466}{1267}[$. L'application f_2, ensuite, est de même strictement croissante sur I, et on a donc $f_2(\mathrm{I}) =]f_2(1{,}732);f_2(1{,}733)[=]0{,}366;0{,}3665[$. Enfin l'application f_3 est strictement décroissante sur I, et il vient donc $f_3(\mathrm{I}) =]f_3(1{,}733);f_3(1{,}732)[=]\frac{1000}{2733};\frac{250}{683}[$. On a ainsi, respectivement : $\frac{116}{317} < f_1(\alpha) < \frac{466}{1267}$; $0{,}366 < f_2(\alpha) < 0{,}3665$; $\frac{1000}{2733} < f_3(\alpha) < \frac{250}{683}$.

3. On a vu (dans la question 1) que $f_1(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = f_2(\sqrt{3})$. Par ailleurs on a $f_3(\sqrt{3}) = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = f_2(\sqrt{3})$. D'où les égalités demandées. D'après la question 2 on a alors les encadrements : $\frac{116}{317} < a < \frac{466}{1267}$; $0{,}366 < a < 0{,}3665$; $\frac{1000}{2733} < a < \frac{250}{683}$. Il vient ainsi : $\max(\frac{116}{317};0{,}366;\frac{1000}{2733}) = 0{,}366$, $\min(\frac{466}{1267};0{,}3665;\frac{250}{683}) = \frac{250}{683}$.

4. On a $\varphi_\lambda(\alpha) = \lambda f_2(\alpha)+(1-\lambda)f_3(\alpha) = \lambda a+(1-\lambda)a = a$. Par ailleurs $\varphi_\lambda'(x) = \lambda f_2'(x)+(1-\lambda)f_3'(x) = \dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1-\lambda}{(1+x)^2}$; il vient donc : $\varphi_\lambda' \geq 0$ sur I $\Leftrightarrow$ $2(1-\lambda) \leq (1+x)^2\lambda$ sur I $\Leftrightarrow$ $2(1-\lambda) \leq 1{,}732^2\,\lambda \Leftrightarrow (2{,}732^2+2)\lambda \geq 2 \Leftrightarrow \lambda \geq \dfrac{2}{2{,}732^2+2}$. Posons $\lambda^+ = \dfrac{2}{2{,}732^2+2}$; on a $\lambda^+ = 0{,}211331\ldots \in\ ]0;1[$. Pour $\lambda \in\ ]\lambda^+;1]$, $\varphi_\lambda' > 0$ sur I ; pour $\lambda = \lambda^+$, $\varphi_\lambda' > 0$ sur $]1{,}732;1{,}733]$ et $\varphi_\lambda'(1{,}732) = 0$. Donc pour tout $\lambda \in [\lambda^+;1]$, φ_λ est strictement croissante sur I. On montre de même que φ_λ est strictement décroissante sur I pour $\lambda \in [0;\lambda^-]$, où $\lambda^- = \dfrac{2}{2{,}733^2+2} = 0{,}211209\ldots \in\ ]0;\lambda^+[$. Supposons enfin $\lambda \in\ ]\lambda^-;\lambda^+[$; on a, pour $x \in$ I : $2(1-\lambda) = (1+x)^2\lambda \Leftrightarrow (1+x)^2 = \dfrac{2}{\lambda} - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}-2} - 1$. L'application $\lambda \mapsto \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}-2} - 1$ étant strictement décroissante sur $[\lambda^-;\lambda^+]$, on a $\sqrt{\dfrac{2}{\lambda^+}-2} - 1 < \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}-2} - 1 < \sqrt{\dfrac{2}{\lambda^-}-2} - 1$, soit $1{,}732 < \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}-2} - 1 < 1{,}733$, et donc $\sqrt{\dfrac{2}{\lambda}-2} - 1 \in$ I. Il découle alors de l'étude du signe de φ_λ' que φ_λ décroît strictement sur $[1{,}732;x_{\min}]$ et croît strictement sur $[x_{\min};1{,}733]$, où $x_{\min} = \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}-2} - 1$.

5. Comme $\lambda = 0{,}212 > \lambda^+ = 0{,}211\ldots$, φ_λ est strictement croissante sur I et on a donc $\varphi_\lambda(\mathrm{I}) = [\varphi_\lambda(1{,}732);\varphi_\lambda(1{,}733)]$. Il vient : $\varphi_\lambda(1{,}732) = \lambda f_2(1{,}732)+(1-\lambda)f_3(1{,}732) = 0{,}212\times0{,}366 + 0{,}788\times\dfrac{250}{683} = 0{,}077592 + \dfrac{197}{683} > 0{,}366025 > 0{,}366$, et $\varphi_\lambda(1{,}733) = \lambda f_2(1{,}733)+(1-\lambda)f_3(1{,}733) = 0{,}212\times0{,}3665 + 0{,}788\times\dfrac{1000}{2733} = 0{,}077698 + \dfrac{788}{2733} < 0{,}366026 < \dfrac{250}{683}$. On a ainsi : $0{,}366025 < a < 0{,}366026$.

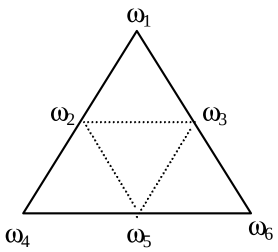
6. La fonction φ_λ étant croissante sur I pour $\lambda \in [\lambda^+;1]$, on a $\varphi_\lambda(\mathrm{I}) = [\varphi_\lambda(1{,}732);\varphi_\lambda(1{,}733)]$ et donc $\omega(\lambda) = \varphi_\lambda(1{,}733)-\varphi_\lambda(1{,}732)$. Il vient : $\omega(\lambda) = \lambda(f_2(1{,}733)-f_2(1{,}732)) + (1-\lambda)(f_3(1{,}733)-f_3(1{,}732)) = 5\cdot10^{-4}\lambda - (1-\lambda)\dfrac{10^3}{2732\times2733} = \left(5\cdot10^{-4} + \dfrac{10^3}{2732\times2733}\right)\lambda - \dfrac{10^3}{2732\times2733}$. L'expression précédente, de la forme $u\lambda+v$ avec $u > 0$, montre que ω est une fonction affine croissante sur $[\lambda^+;1]$: ω est donc minimale en λ^+. On a : $\omega(\lambda^+) = 3{,}866\ldots\cdot10^{-8} < 4\cdot10^{-8}$.

Problème 20

1. Posons AB = BC = CA = $2a$. L'aire de ABC est $a^2\sqrt{3}$. Par ailleurs, l'aire totale de cinq disques de diamètre 1 est $5\dfrac{\pi}{4}$. Une condition nécessaire pour que ABC convienne est donc que l'on ait $2a \geq \sqrt{\dfrac{5\pi}{\sqrt{3}}}$. Or on a, d'une part $(5\pi)^2 > (5\times3{,}14)^2 = 15{,}7^2 = 246{,}49$, et d'autre part $(9\sqrt{3})^2 = 81\times3 = 243$. Il vient donc $5\pi > 9\sqrt{3}$, soit $\sqrt{\dfrac{5\pi}{\sqrt{3}}} > 3$, et enfin $2a > 3$. On en déduit que $h = \dfrac{1}{3}\left(2a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{2a}{2\sqrt{3}} > \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0{,}8$ (puisque $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$).

2. a) L'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{h-0{,}5}{h}$ transforme ABC en le triangle A'B'C' indiqué ; ABC étant équilatéral, il en est donc de même de A'B'C'.

b) Un disque Δ de centre ω et de diamètre 1 est contenu dans ABC si et seulement la distance de ω à chacun des côtés de ABC est $\geq 0{,}5$, donc si et seulement si ω est contenu dans le triangle A'B'C'.



3. a) Les points ω_i ($1 \leq i \leq 5$) indiqués sur la figure ci-contre conviennent.

b) Si DE = EF = FD < 2, chacun des 4 triangles équilatéraux en lesquels se décompose le triangle DEF (voir la figure) ne peut contenir qu'un point ω_i au plus (puisque son diamètre est < 1) ; on ne peut donc pas trouver dans DEF 5 points convenables.

4. Le plus petit triangle équilatéral ABC convenable correspond à un triangle A'B'C' de côtés de mesure 2. Avec des notations évidentes, on a $h' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et donc $a = \sqrt{3}(h' + 0{,}5) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Le plus petit triangle équilatéral convenable a donc des côtés de mesure $2+\sqrt{3}$.

Problème 21

1. a) On a respectivement : $(r-U)^2+(s-V)^2 = U^2+V^2 \Leftrightarrow OC^2 = OA^2$; $(\ell-U)^2+V^2 = U^2+V^2 \Leftrightarrow OB^2 = OA^2$; $\ell sH = 1 \Rightarrow \ell \neq 0$ & $s \neq 0 \Leftrightarrow B \neq A$ & $C \notin (AB)$; $V = 0 \Leftrightarrow O \in (AB)$. Les trois premières égalités expriment donc que O est le centre du cercle circonscrit à ABC, la suivante exprime que ABC est un triangle non dégénéré, la dernière, que O est sur la droite (AB).
b) En tenant compte de l'égalité $V = 0$, les deux premières égalités s'écrivent respectivement $(r-U)^2+s^2 = U^2$ et $(\ell-U)^2 = U^2$, soit encore $r^2-2rU+s^2 = 0$ et $\ell^2-2\ell U = 0$. En éliminant U entre ces deux dernières égalités, on obtient $\ell r^2-\ell^2r+\ell s^2 = 0$, soit $\ell(r^2-\ell r+s^2) = 0$. En multipliant alors cette égalité par sH, on obtient enfin $r^2-\ell r+s^2 = 0$, *i.e.* $\ell r-r^2-s^2 = 0$.
c) On a : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = r(\ell-r)+s(-s) = \ell r-r^2-s^2$. Par suite, le triangle ABC étant supposé non dégénéré, on a : $\ell r-r^2-s^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow$ ABC rectangle en C. Si $O \in (AB)$, on a vu qu'alors $\ell r-r^2-s^2 = 0$; par suite, ABC est rectangle en C.
2. On a : $H\ell[(r-U)^2+(s-V)^2-(U^2+V^2)] - Hr[(\ell-U)^2+V^2-(U^2+V^2)] + 2V[\ell sH-1] + H\ell[\ell r-r^2-s^2]$

$$= H\ell[r^2-2rU+s^2-2sV] - Hr(\ell^2-2\ell U) + 2V(\ell sH-1) + H\ell[\ell r-r^2-s^2]$$
$$= H\ell[-2rU-2sV] - Hr(-2\ell U) + 2V(\ell sH-1) = H\ell[-2sV] + 2V(\ell sH-1) = -2V.$$

Si O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC non dégénéré, et si ABC est rectangle en C, on a, respectivement, $(r-U)^2+(s-V)^2-(U^2+V^2) = (\ell-U)^2+V^2-(U^2+V^2) = 0$, $\ell sH-1 = 0$, $\ell r-r^2-s^2 = 0$; par suite $-2V = 0$, et donc $O \in (AB)$.

Problème 22

1. L'ensemble $G(f)$ contient 0 puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+0) = f(x)$. Par ailleurs, si t, $t' \in G(f)$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+(t'-t)) = f(x+t'-t) = f(x+t'-t+t) = f(x+t') = f(x)$, et donc $t'-t \in G(f)$. Par suite, $G(f)$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Si f est constante, égale à a, pour tous x, $t \in \mathbb{R}$ on a $f(x+t) = f(x) = a$, et $G(f) = \mathbb{R}$.
2. a) Supposons que $\tau \notin G(f)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe t, $t' \in G(f)$ tels que $\tau < t' < t < \tau + \varepsilon$. Soit $\tau' = t-t'$; on a alors $\tau' \in G(f)$ et $\tau' < \varepsilon$. Comme $\tau < \tau'$, .on a donc $\tau < \varepsilon$. Cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\tau = 0$, en contradiction avec l'hypothèse que $\tau \notin G(f)$.
b) Soit $t' = t-n\pi$. On a $t' \in G(f)$ et $0 \leq t' < (n+1)\tau - n\tau = \tau$. Par suite $t' = 0$, *i.e.* $t = n\pi$. On a donc $G(f) \subseteq \tau\mathbb{Z}$. $G(f)$ étant un sous-groupe additif, et puisque $\tau \in G(f)$, on a aussi $\tau\mathbb{Z} \subseteq G(f)$. Par suite, $G(f) = \tau\mathbb{Z}$.
c) Soit x, $x' \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$; f étant continue en x', il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x'-y| < \eta$, alors $|f(x')-f(y)| < \varepsilon$. Comme $\tau = 0$, il existe $t \in G(f)$ tel que $0 < t < \eta$. Comme $\mathbb{R} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}[x+mt,x+(m+1)t[$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x+mt \leq x' < x+(m+1)t$. Posons $y = x+mt$. On a : $f(y) = f(x)$. Comme $0 \leq x'-y < (x+(m+1)t)-(x+mt) = t < \eta$, il vient $|f(x')-f(y)| < \varepsilon$, et donc $|f(x')-f(x)| < \varepsilon$. Cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on a $f(x') = f(x)$: f est donc constante sur $\mathbb{R}$.
d) Soit $t \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x+t \in \mathbb{Q}$ et donc $f(x+t) = f(x) = 1$; si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x+t \notin \mathbb{Q}$ et donc $f(x+t) = f(x) = 0$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+t) = f(x)$: $\mathbb{Q} \subseteq G(f)$. Si $t \notin \mathbb{Q}$, soit $x \in \mathbb{Q}$; on a $x+t \notin \mathbb{Q}$ et donc $f(x+t) = 0$ tandis que $f(x) = 1$: $t \notin G(f)$. Finalement, $G(f) = \mathbb{Q}$ et, en conséquence, $\tau = 0$.

Problème 23

1. S est l'ensemble des combinaisons linéaires de 4 éléments de F : c'est donc un sous-espace vectoriel de F.
2. On a $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ et $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$: S est donc engendré par les applications 1 et $\cos 2x$, et dim S ≤ 2. Si on avait dim S = 1, S serait engendré par 1 et ne contiendrait donc que des fonctions constantes, ce qui n'est pas le cas (on a $\cos 2\cdot 0 = 1$ et $\cos 2\dfrac{\pi}{4} = 0$). On a donc dim S = 2 et S admet la base $\{1,\cos 2x\}$.
3. S est l'espace vectoriel des solutions de $y'' + \lambda y' + \mu y = 0$ si et seulement si 1 et $\cos 2x$ vérifient cette équation. La première condition implique que $\mu = 0$: l'équation s'écrit donc $y'' + \lambda y' = 0$. La seconde condition s'écrit alors

$-4\cos 2x-2\lambda\sin 2x = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or, pour $x = 0$, on a : $-4\cos 2x-2\lambda\sin 2x = -4\cos 2\cdot 0 = -4 \neq 0$. La seconde condition ne saurait donc être vérifiée, et, par suite, S ne peut pas être l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle du type indiqué.

Problème 24

1. On a : $q^n P(p/q) = q^n \sum_{k=0}^{k=n} c_k (p/q)^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} c_k q^k p^{n-k} = c_0p^n + c_1qp^{n-1} + \ldots + c_{n-1}q^{n-1}p + c_nq^n$. Si $q^nP(p/q) = 0$, il vient : $c_0p^n + c_1qp^{n-1} + \ldots + c_{n-1}q^{n-1}p = -c_nq^n$. L'entier p divise le premier membre de cette égalité : il divise donc le second membre, soit $-c_nq^n$; comme p est premier avec q, et donc avec q^n, p divise c_n. De l'égalité $c_1qp^{n-1} + \ldots + c_{n-1}q^{n-1}p + c_nq^n = -c_0p^n$ on déduit de même que q divise c_0.
2. a) D'après le résultat précédent, si $P(p/q) = 0$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $(p,q) = 1$, p divise -5, et donc $p = 1$ ou 5, et q divise 2, et donc $q = 1$ ou 2, ce qui donne $p/q \in \{1, 1/2, 5, 5/2\}$. Or on a $P(1) = -3 \neq 0$, $P(1/2) = 1/4 - 5 \neq 0$, $P(5) = 250 - 5 \neq 0$, $P(5/2) = 125/4 - 5 \neq 0$. Par suite P n'a pas de racine rationnelle strictement positive.
b) On a $\alpha > 0$ et $P(\alpha) = 2\alpha^3-5 = 2(5/2) - 5 = 0$. Comme P n'a pas de racine rationnelle strictement positive, on en déduit que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
3. a) Si $P(p/q) = 0$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $(p,q) = 1$, p divise -1, et donc $p = 1$, et q divise 1, et donc $q = 1$, ce qui donne $p/q = 1$. Comme $P(1) = -3 \neq 0$, P n'a pas de racine rationnelle strictement positive.
b) On a $\alpha > 0$ et donc $2\alpha > 0$. Par ailleurs il vient : $P(2\alpha) = 8\alpha^3-6\alpha-1$. L'égalité $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ donne, pour $\theta = \pi/9$, $\cos(\pi/3) = 4\alpha^3-3\alpha$, soit $4\alpha^3-3\alpha = 1/2$, et donc $8\alpha^3-6\alpha-1 = 0$. Ainsi $P(2\alpha) = 0$. P n'ayant pas de racine rationnelle strictement positive, on en déduit que $2\alpha \notin \mathbb{Q}$, et donc que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Problème 25

1. L'application $t \mapsto \pi(t - \frac{1}{2})$ est une bijection de I sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$; par ailleurs l'application $u \mapsto \tan u$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$: leur composée $t \mapsto \tan \pi(t - \frac{1}{2})$ est donc une bijection de I sur $\mathbb{R}$.
2. a) Soit $x \in I \cap \mathbb{Q}$; on a $x + \alpha \in\,]1,3[\, \subset\,]0,3[\, = 3I$, et $x + \alpha \notin \mathbb{Q}$ (sinon on aurait $\alpha = (x+\alpha)-x \in \mathbb{Q}$). Comme $x + \alpha \in 3I$ est irrationnel si et seulement si $\frac{x+\alpha}{3} \in I$ est irrationnel, il vient : $x + \alpha \in 3J$. On a donc bien : $I\cap\mathbb{Q} + \alpha \subset 3J$. Comme $J\cap(I\cap\mathbb{Q}) = \varnothing$, on définit une application ϕ sur I en posant : $\phi(x) = x$ si $x \in J$, $= x + \alpha$ si $x \in I\cap\mathbb{Q}$. Comme $x + \alpha \in\,]1,3[$ et que $J\cap]1,3[\, = \varnothing$, ϕ est une injection de I dans 3J.
b) L'application $\frac{1}{3}\phi$ est une injection de I dans J : I est donc équipotent à une partie de J. Par ailleurs, puisque $J \subset I$, J est trivialement équipotent à une partie de I. D'après le théorème de Schröder-Bernstein, on en conclut que I et J sont équipotents.
3. Puisque $0 < x < 1$, on a $\frac{1}{x} > 1$: il existe donc un unique entier a_1 tel que $x_1 = \frac{1}{x} - a_1 \in [0,1[$; comme x est irrationnel, il en est de même de $\frac{1}{x}$, et donc de x_1 (qui, par suite, est > 0) : on a bien $x_1 \in J$. Posons $x_0 = x$, et soit $P(n)$ la propriété : « Il existe une suite d'entiers unique $(a_k)_{1\le k<n}$ telle que $\frac{1}{x_k} = a_{k+1} + x_{k+1}$ avec $x_{k+1} \in J$, pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ». P(0) est vraie ; montrons alors que, si $P(n)$ est vraie, il en est de même de $P(n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $(a_k)_{1\le k<n}$ existe et est unique, et $x_n \in J$; par un raisonnement identique à celui fait pour $x_0 = x$, on conclut alors qu'il existe un unique entier a_{n+1} tel que $\frac{1}{x_n} = a_{n+1} + x_{n+1}$, avec $x_{n+1} \in J$. $P(n+1)$ est démontrée, et on obtient ainsi que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in S$; l'application $((a_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}) \mapsto (c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $c_{2k-1} = a_k$ et $c_{2k} = b_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, est une bjiection de S×S sur S. En notant $\cong$ l'équipotence, on a donc : $\mathbb{R} \cong I \cong J \cong S \cong S\times S \cong J\times J \cong I\times I \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Problème 26

1. Pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, les conditions $u_2(t) \neq 0$ et $\mathbb{R}u_1(t) = \mathbb{R}u_2(t)$ entraînent l'existence d'un réel $\varphi(t)$ tel que $u_1(t) = (x_1(t),y_1(t)) = \varphi(t)u_2(t) = \varphi(t)(x_2(t),y_2(t))$. Le vecteur $\ell(u_2) = (X_2,Y_2)$ étant non nul, on a X_2 ou $Y_2 \neq 0$. Supposons $Y_2 \neq 0$; pour tout $t \neq \tau$ assez voisin de τ, on a donc $y_2(t) \neq 0$ et l'égalité $y_1(t) = \varphi(t)y_2(t)$ s'écrit $\varphi(t)= y_1(t)/y_2(t)$:

$\varphi(t)$ tend vers Y_1/Y_2 quand t tend vers τ, $t \neq \tau$. Par suite on a $\ell(u_1) = (Y_1/Y_2)\ell(u_2)$, et donc $\mathbb{R}\ell(u_1) = \mathbb{R}\ell(u_2)$. Le cas $Y_2 = 0$, $X_2 \neq 0$ se traite de même.

2. Si $v \in L$ vérifie $\mathbb{R}v(t) = \mathbb{R}u(t)$ pour tout $t \in \mathrm{I}\setminus\{\tau\}$, on a, d'après ce qui précède, $\mathbb{R}\ell(v) = \mathbb{R}\ell(u)$. L'existence et la valeur de $\Delta = \ell(\delta)$ sont donc indépendantes du choix de $u \in L$ telle que $\mathbb{R}u = \delta$ sur $\mathrm{I}\setminus\{\tau\}$.

3. a) On a d'abord : $\delta(t) = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma(\tau)\gamma(t)} = \mathbb{R}(\gamma(t)-\gamma(\tau)) = \mathbb{R}\frac{\gamma(t)-\gamma(\tau)}{t-\tau}$. L'application γ étant dérivable en τ, on a $\lim_{t\to\tau, t\neq\tau} \frac{\gamma(t)-\gamma(\tau)}{t-\tau} = \gamma'(\tau)$; il en résulte que $\Delta = \ell(\delta)$ existe et est égale à $\mathbb{R}\gamma'(\tau)$: la tangente à $\gamma(\mathrm{I})$ en $\gamma(\tau)$ est la droite affine $\gamma(\tau)+\mathbb{R}\gamma'(\tau)$.

b) Pour tout $t \in \mathrm{I}\setminus\{\tau\}$ posons $\delta(t) = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma(\tau)\gamma(t)} = \mathbb{R}(\gamma(t)-\gamma(\tau)) = \mathbb{R}(t-\tau, f(t)-f(\tau))$. Supposons d'abord que $f'(\tau)$ existe. Si $f'(\tau)$ est finie, on a $\delta(t) = \mathbb{R}(t-\tau, f(t)-f(\tau)) = \mathbb{R}(1, \frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau})$: il vient donc $\Delta = \ell(\delta) = \mathbb{R}(1, f'(\tau))$. Si $f'(\tau)$ est infinie, on a : $\delta(t) = \mathbb{R}(t-\tau, f(t)-f(\tau)) = \mathbb{R}(\frac{t-\tau}{f(t)-f(\tau)}, 1)$: il vient donc $\Delta = \ell(\delta) = \mathbb{R}(0,1)$. Inversement, supposons que $\Delta = \ell(\delta)$ existe, et soit $u = (x,y) \in L$ telle que, pour $t \in \mathrm{I}\setminus\{\tau\}$, $\delta(t) = \mathbb{R}(t-\tau, f(t)-f(\tau)) = \mathbb{R}u(t)$: on a $\ell(\delta) = \mathbb{R}\ell(u) = (X,Y)$. Si $X \neq 0$, on a $x(t) \neq 0$ pour tout $t \neq \tau$ assez proche de τ, et donc $\mathbb{R}(1, \frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}) = \mathbb{R}(x(t), x(t)\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau})$: il en découle que $x(t)\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau} = y(t)$, soit $\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau} = \frac{y(t)}{x(t)}$, et donc que $f'(\tau) = \frac{Y}{X}$. Si $X = 0$, alors $Y \neq 0$: on montre de même que $\frac{t-\tau}{f(t)-f(\tau)}$ tend vers 0 quand t tend vers τ, $t \neq \tau$, et donc que $f'(\tau) = \pm\infty$.

Problème 27

1. a) La relation $\sim$ étant réflexive on a $a \sim a$; ainsi $a \in \mathrm{Z}$, et donc $\mathrm{Z} \neq \varnothing$. Par ailleurs on a $\mathrm{Z} \subset \mathrm{I}$: Z est donc majoré par b.
b) D'après la condition C, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $y \in \,]w-\varepsilon; w+\varepsilon[\cap\mathrm{I}$, alors $y \sim w$. Comme $w = \sup \mathrm{Z}$, il existe $z \in \mathrm{Z}\cap]w-\varepsilon; w[$. On a donc $a \sim z$ (puisque $a \in \mathrm{Z}$) et $z \sim w$ (puisque $z \in \,]w-\varepsilon; w+\varepsilon[\cap\mathrm{I}$) . D'après la transitivité de $\sim$ on a $a \sim w$, soit $w \in \mathrm{Z}$. Si $w < b$, soit $y \in \,]w; w+\varepsilon[\cap\mathrm{I}$, en sorte que $w \sim y$; comme $a \sim w$, il vient $a \sim y$, soit $y \in \mathrm{Z}$, avec $y > w$, en contradiction avec le fait que $w = \sup \mathrm{Z}$. Par suite, $w = b$, et donc $a \sim b$.
2. a) La relation indiquée est clairement réflexive (f est bornée sur $[x;x] = \{x\}$) et symétrique (si f est bornée sur $[x;y]$ alors f est bornée sur $[y;x]$) ; la transitivité résulte trivialement du fait que, pour tous x, y, $z \in \mathrm{I}$, on a : $[x;z] \subset [x;y]\cup[y;z]$. Soit $x \in \mathrm{I}$ et $\delta > 0$; f étant continue sur I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $y \in \,]w-\varepsilon; w+\varepsilon[\cap\mathrm{I}$, $f(y) \in \,]f(x)-\delta; f(x)+\delta[$. Ainsi, pour tout $y \in \mathrm{I}$ tel que $|x-y| < \varepsilon$, f est bornée (par $f(x)-\delta$ et $f(x)+\delta$) sur $[x;y]$, *i.e.* $x \sim y$. D'après le lemme de Moss et Roberts, on a donc $a \sim b$, *i.e.* f est bornée sur $[a;b]$.
b) La relation indiquée est réflexive, symétrique et, d'après une remarque déjà faite, transitive. Soit $x \in \mathrm{I}$ et $\delta > 0$ tel que $f(x)+\delta < \mathrm{M}$; f étant continue sur I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $z \in \,]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\cap\mathrm{I}$, alors $f(z) \in \,]f(x)-\delta; f(x)+\delta[$. Ainsi, pour tout $y \in \mathrm{I}$ tel que $|x-y| < \varepsilon$, on a $\sup f([x,y]) \leq f(x)+\delta < \mathrm{M}$, *i.e.* $x \sim y$. Le lemme de Moss et Roberts entraîne alors que $a \sim b$, *i.e.* $\sup f(\mathrm{I}) < \mathrm{M}$. Par suite, il existe $u \in \mathrm{I}$ tel que $f(u) = \sup f(\mathrm{I})$: sinon, c'est-à-dire si $f(u) < \sup f(\mathrm{I}) = \mathrm{M}'$ pour tout $u \in \mathrm{I}$, en prenant M' pour valeur de M dans ce qui précède, on aurait $\sup f(\mathrm{I}) < \mathrm{M}'$, et donc $\sup f(\mathrm{I}) < \sup f(\mathrm{I})$. Soit alors $g = -f$ et soit $-m = \sup g(\mathrm{I})$: on a $m = \inf f(\mathrm{I})$; d'après ce qui précède, il existe $v \in \mathrm{I}$ tel que $g(v) = -m$, *i.e.* tel que $f(v) = m = \inf f(\mathrm{I})$.
c) La relation indiquée est clairement réflexive, symétrique, et transitive (si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $(f(x)-\alpha)(f(y)-\alpha)^2(f(z)-\alpha) > 0$, d'où $x \sim z$). Pour $x \in \mathrm{J}$, soit $\delta = |f(x)-\alpha| > 0$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $y \in \,]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\cap\mathrm{I}$, alors $|f(x)-f(y)| < \delta$. Si $f(x) < \alpha$ (resp., $> \alpha$) on a alors $f(y) < f(x)+(\alpha-f(x)) = \alpha$ (resp., $> f(x)-(f(x)-\alpha) = \alpha$), et donc $x \sim y$. D'après le lemme de Moss et Roberts, on a alors $x_1 \sim x_2$, soit $(f(x_1)-\alpha)(f(x_2)-\alpha) > 0$, en contradiction avec le choix de α. Il existe donc $x \in \,]x_1; x_2[$ tel que $f(x) = \alpha$.

Problème 28

1. a) Pour $x > 0$, on a : $f(x) \geq a \Leftrightarrow x^2 + a^2 \geq 2ax \Leftrightarrow (x-a)^2 \geq 0$; en particulier, $f(x) \geq a$ pour $x \geq 1$. De même, toujours pour $x > 0$, il vient : $f(x) \leq x \Leftrightarrow x^2 + a^2 \leq 2x^2 \Leftrightarrow x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow x \geq a$, CQFD. On a $x_1 = f(1) \geq a$; supposons

$x_n \geq a > 1$ pour $n \geq 1$: on a alors $x_{n+1} = f(x_n) \geq a$, et donc $x_n \geq a$ pour tout $n \geq 1$. Par suite, pour $n \geq 1$, $x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n$: $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

b) La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par a : elle a donc une limite $\ell \in [a;+\infty[$; f étant continue sur $[a;+\infty[$, on a $\ell = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\ell)$: ℓ est donc un point fixe de f sur $[a;+\infty[$. Comme on a $f(x) = x \Leftrightarrow x = a$, il en résulte que $\ell = \lim x_n = a$.

2. On a : $\delta_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}-a}{2a} = \dfrac{1}{4ax_n}(x_n^2 + a^2 - 2ax_n) = \dfrac{1}{4ax_n}(x_n-a)^2 = \dfrac{a}{x_n}\left(\dfrac{x_n-a}{2a}\right)^2 = \dfrac{a}{x_n}\delta_n^2$. Comme $x_1 = \dfrac{1+a^2}{2}$, il vient : $\delta_2 = \dfrac{a}{x_1}\delta_1^2 = \dfrac{a}{x_1}\left(\dfrac{a}{x_0}\delta_0^2\right)^2 = \dfrac{a^3}{x_1}\delta_0^4 = \dfrac{a^3}{x_1}\dfrac{(a-1)^4}{(2a)^4} = \dfrac{(a-1)^4}{8a(a^2+1)}$. Par ailleurs, puisque $x_n \geq a$ pour $n \geq 1$, on a $\delta_{n+1} = \dfrac{a}{x_n}\delta_n^2 \leq \delta_n^2$.

b) On a : $\varphi(x) = \dfrac{x^4}{(x+1)[(x+1)^2+1]} = \dfrac{x^4}{x^3+3x^2+4x+2} = \dfrac{1}{x^{-1}+3x^{-2}+4x^{-3}+2x^{-4}}$; les fonctions $x \mapsto x^{-k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) décroissant sur $]0;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{-1}+3x^{-2}+4x^{-3}+2x^{-4}}$ y est croissante. Comme $a \leq \sqrt{2}$, on a $\delta_2 = \dfrac{1}{8}\varphi(a-1) \leq \dfrac{1}{8}\varphi(\sqrt{2}-1) = \dfrac{1}{8}\dfrac{(\sqrt{2}-1)^4}{\sqrt{2}[(\sqrt{2})^2+1]} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^4}{24\sqrt{2}} =_c 8{,}67\ldots\cdot 10^{-4} < 10^{-3}$.

c) Pour tout $n \geq 2$, on a : $\delta_n \leq \delta_{n-1}^2 \leq (\delta_{n-2}^2)^2 = ((\delta_{n-3}^2)^2)^2 = (\delta_{n-3})^{2^3} \leq \ldots \leq (\delta_2)^{2^{n-2}} < (10^{-3})^{2^{n-2}} = 10^{-3\cdot 2^{n-2}}$; d'où $x_n - a < 2a\cdot 10^{-3\cdot 2^{n-2}}$, et, en particulier, $x_5 - a < 3\cdot 10^{-24}$.

Problème 29

1. On a : $\delta_2(t)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-t)^2 = n\,t^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}x_i^2 = n\left(t - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 - n\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}x_i^2$. Par suite δ_2 est minimal sur $\mathbb{R}$ ssi $\overline{x} - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = 0$, *i.e.* ssi $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

2. a) Si $x = y < z$ ou $x < y = z$, on a soit $[x;z] = [y;z]$ soit $[x;z] = [x;y]$: dans les deux cas, il n'y a rien à démontrer. Si $x = y = z$, la condition $x \leq t < t' \leq z$ étant toujours fausse, la condition de stricte décroissance sur $[x;z]$ est automatiquement satisfaite. Supposons enfin que $x < y < z$; si $x \leq t < t' \leq y$ ou $y \leq t < t' \leq z$, il n'y a rien à démontrer ; si $x \leq t < y < t' \leq z$, on a d'une part $\delta(t) < \delta(y)$, d'autre part $\delta(y) < \delta(t')$, et donc $\delta(t) < \delta(t')$ CQFD.

b) Pour $t \in [x_k;x_{k+1}]$, on a : $\delta_1(t) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-t| = (t-x_1) + \ldots + (t-x_k) + (x_{k+1}-t) + \ldots + (x_n-t) = kt - (x_1 + \ldots + x_k) + (x_{k+1} + \ldots + x_n) - (n-k)t = (2k-n)t - (x_1 + \ldots + x_k) + (x_{k+1} + \ldots + x_n)$. Sur $[x_k;x_{k+1}]$ l'application δ_1 est donc affine, strictement décroissante si $k < \dfrac{n}{2}$, constante si $k = \dfrac{n}{2}$, strictement croissante si $k > \dfrac{n}{2}$.

c) D'après ce qui précède, l'application δ_1 est strictement décroissante sur $[x_1;x_2]$, $[x_2;x_3]$, …, $[x_{m-1};x_m]$ (puisque $m-1 = \dfrac{n-1}{2} < \dfrac{n}{2}$). Par suite, elle est strictement décroissante sur $[x_1;x_m]$. De même, elle est strictement croissante sur $[x_m;x_{m+1}]$, …, $[x_{n-1};x_n]$, et donc sur $[x_m;x_n]$. Dans chacun des trois cas $x_1 < x_m < x_n$, $x_1 = x_m < x_n$ ou $x_1 < x_m = x_n$, $x_1 = x_m = x_n$, il est clair alors que x_m est l'unique valeur où δ_1 atteint son minimum sur $[x_1;x_n]$. Par ailleurs si $t < x_1$, on a $\delta_1(t) = n|t-x_1| + \delta_1(x_1) > \delta_1(x_1)$, et, de même, si $t > x_n$, $\delta_1(t) = n|t-x_n| + \delta_1(x_n) > \delta_1(x_n)$: le minimum de δ_1 sur $\mathbb{R}$ est donc atteint en x_m et en ce point seulement.

d) Si n est pair, posons $n = 2m$; δ_1 est strictement décroissante sur $[x_1;x_m]$, constante sur $[x_m;x_{m+1}]$, et strictement croissante sur $[x_{m+1};x_n]$: elle atteint donc son minimum en un point quelconque de $[x_m;x_{m+1}]$. Par suite, il n'y a unicité de la d_1-moyenne que si les valeurs de rang m et m+1 sont égales.

Problème 30

1. On a $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} = [x+(1-x)]^n = 1$ et donc $f(x) = f(x)\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} f(x)$; par suite, $f(x) - B(f)_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$. Puisque $K^+ \cup K^- = \{\, k \in \mathbb{N}^* \,/\, 0 \le k \le n \,\}$ et $K^+ \cap K^- = \varnothing$, on a :

$$f(x) - B(f)_n(x) = \sum_{k\in K^+} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) + \sum_{k\in K^-} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

On a alors : $|\Sigma^-| \le \sum_{k\in K^-} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$. Comme $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$ pour tout $k \in K^-$, on a $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $k \in K^-$, et donc $|\Sigma^-| \le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in K^-} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}$.

2. a) On a : $\{|\overline{X}-x| \ge \delta\} = \bigcup_{0\le k\le n}\{\overline{X} = \frac{k}{n} \wedge \left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta\} = \bigcup_{k\in K^+}\{\overline{X} = \frac{k}{n}\}$. La v.a. $X_1+\ldots+X_n$ étant binomiale de paramètres n et x, on a donc : $P(|\overline{X}-x| \ge \delta) = \sum_{k\in K^+} P(\overline{X} = \frac{k}{n}) = \sum_{k\in K^+} P(X_1+\ldots+X_n = k) = \sum_{k\in K^+} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}$.

b) Comme $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le |f(x)| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le 2M$ pour $x \in I$, on a :

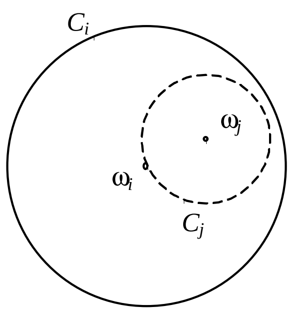
$$|\Sigma^+| = \left|\sum_{k\in K^+} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \le \sum_{k\in K^+} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\le 2M \sum_{k\in K^+} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} = 2M\, P(|\overline{X}-x| \ge \delta).$$

Il vient par ailleurs : $P(|\overline{X}-x| \ge \delta) = P(|\overline{X}-E(\overline{X})| \ge \delta) \le \frac{\mathrm{Var}(\overline{X})}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$. Comme $x(1-x) \le \frac{1}{4}$ pour $x \in I$, on a $P(|\overline{X}-x| \ge \delta) \le \frac{1}{4n\delta^2}$ et donc $|\Sigma^+| \le 2M\frac{1}{4n\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2}$. Pour n assez grand, on a $\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $|\Sigma^+| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, $|f(x) - B(f)_n(x)| \le |\Sigma^+| + |\Sigma^-| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, pour tout $x \in I$. La suite de fonctions polynomiales $(B(f)_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers f uniformément sur $I = [0;1]$.

Problème 31

1. a) Soit ω_i le centre du cercle C_i. D'après $A^{(2)}$ il existe un cercle $C_j \in \mathcal{C}$ passant par ω_i (voir la figure) : ω_j étant le centre du cercle C_j, on a $2r_j = 2\omega_j\omega_i < r_i$ et donc $r_j < \frac{r_i}{2}$.



b) D'après le résultat précédent il existe une suite $(C_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $\mathcal{C}$ strictement décroissante (c'est-à-dire telle que $C_{i_n} \supset C_{i_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et telle que, en notant r_n le rayon de C_{i_n}, on a ait $r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$, et donc $r_{n+1} < \frac{r_0}{2^{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En conséquence, la suite de compacts $(\overline{C}_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ a une intersection non vide, réduite à un point ω_∞. Si le cercle $C \in \mathcal{C}$ de rayon r passait par ω_∞ on aurait $\overline{C} \subset \overline{C}_{i_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $r < \frac{r_0}{2^{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$: un tel cercle n'existe pas. Il en résulte que l'assertion $A^{(2)}$ est fausse.

Remarque. La conclusion précédente repose sur le fait, tenu pour évident en géométrie scolaire, que, si l'on avait $2r_j = 2\omega_j\omega_i \ge r_i$, les cercles C_i et C_j se couperaient. Posons $\omega_i = (\alpha_i,\beta_i)$ et $\omega_j = (\alpha_j,\beta_j)$. Par une translation suivie d’une rotation, on peut se ramener au cas où $\omega_i = (0,0)$, $\alpha_j \in [\frac{r_i}{2},+\infty[$, $\beta_j = 0$. Les cercles C_i et C_j ont alors respectivement pour équation $x^2+y^2 = r_i^2$ et $x^2+y^2-2\alpha_j x = 0$. Leur intersection a pour équations

$$\begin{cases} x^2+y^2 = r_i^2 \\ r_i^2-2\alpha_j x = 0 \end{cases} \text{ soit encore : } \begin{cases} x^2+y^2 = r_i^2 \\ x = \dfrac{r_i^2}{2\alpha_j} \end{cases}$$

L’équation aux ordonnées des points d’intersection est alors $y^2 = r_i^2 - \left(\frac{r_i^2}{2\alpha_j}\right)^2$, ce qui s’écrit encore : $y^2 = \left(\frac{r_i}{2\alpha_j}\right)^2 (2\alpha_j-r_i)(2\alpha_j+r_i)$. L’intersection est donc vide si et seulement si $2\alpha_j < r_i$, c’est-à-dire si et seulement si $2\omega_j\omega_i < r_i$.

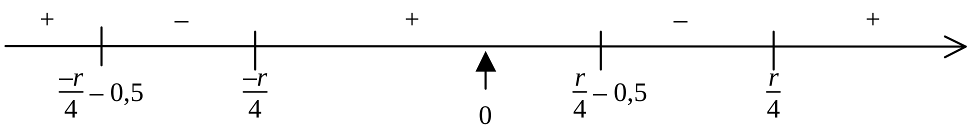
2. a) L’équation aux abscisses des points de $C\cap S_r$ s’obtient en éliminant y et z entre les équations $x^2+y^2+z^2 = r^2$, $(x-4k-1)^2+y^2 = 1$ et $z = 0$: en observant que $4k+1 \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on obtient

$$x = \frac{r^2+16k^2+8k}{2(4k+1)}$$

Pour que cette abscisse soit celle de points réels de S_r il faut et il suffit que l’on ait $x^2-r^2 \leq 0$. Or on a :

$$\begin{aligned}
x^2-r^2 \leq 0 &\Leftrightarrow (x-r)(x+r) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{r^2+16k^2+8k - 2r(4k+1)}{2(4k+1)} \frac{r^2+16k^2+8k + 2r(4k+1)}{2(4k+1)} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [r^2+16k^2+8k-2r(4k+1)][r^2+16k^2+8k+2r(4k+1)] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [16k^2+8k(1-r)+r^2-2r][16k^2+8k(1+r)+r^2+2r] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [k^2+\frac{1-r}{2}k+\frac{r^2-2r}{16}][\, k^2+\frac{1+r}{2}k+\frac{r^2+2r}{16}] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [(k + \frac{1-r}{4})^2 - \frac{(1-r)^2-r^2+2r}{16}][(k + \frac{1+r}{4})^2 - \frac{(1+r)^2-r^2-2r}{16}] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [(k + \frac{1-r}{4})^2 - \frac{1}{16}][(k + \frac{1+r}{4})^2 - \frac{1}{16}] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow (k + \frac{2-r}{4})(k + \frac{-r}{4})(k + \frac{2+r}{4})(k + \frac{r}{4}) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow (k - (\frac{-r}{4} - 0{,}5))(k - \frac{-r}{4})(k - \frac{r}{4})(k - (\frac{r}{4}-0{,}5)) \leq 0
\end{aligned}$$

Considérons le schéma ci-après :

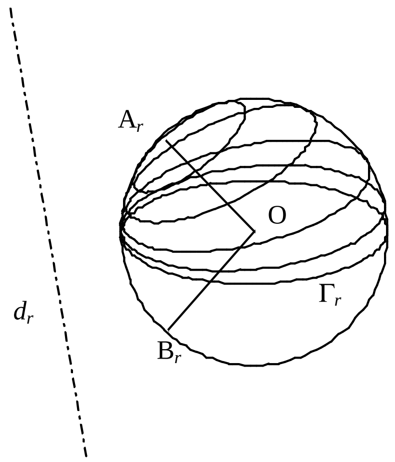


On voit que l’on a : $x^2 - r^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-r}{4} - 0{,}5 \leq k \leq \frac{-r}{4}$ ou $\frac{r}{4} - 0{,}5 \leq k \leq \frac{r}{4}$.

Si $\frac{r}{4} \in \mathbb{Z}$, les seules solutions sont $k = \pm \frac{r}{4}$, valeurs pour lesquelles on a $x = \pm r$: il n’y a donc pour chacune de ces deux valeurs de x qu’un point commun à C et S_r.

Si $\frac{r}{4} - 0{,}5 \in \mathbb{Z}$ on a aussi $\frac{-r}{4} - 0{,}5 \in \mathbb{Z}$, et les valeurs correspondantes de x sont $x = \pm r$: $C\cap S_r$ contient deux points exactement.

S’il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{r}{4} - 0{,}5 < k < \frac{r}{4}$, on a $|x| < r$ et $C\cap S_r$ contient *deux* points d’abscisse x. En outre, on a alors $\frac{-r}{4} < -k < \frac{-r}{4} + 0{,}5$ et il n’existe donc pas d’entier dans l’intervalle $]\frac{-r}{4} - 0{,}5 ; \frac{-r}{4}[$: $C\cap S_r$ contient donc exactement deux points.



S'il n'existe pas d'entier k tel que $\frac{r}{4} - 0,5 < k < \frac{r}{4}$ alors il n'en existe pas dans l'intervalle $]\frac{-r}{4} ; \frac{-r}{4} + 0,5[$ et il en existe donc un (et un seul) dans l'intervalle $]\frac{-r}{4} - 0,5 ; \frac{-r}{4}[$: on aboutit alors à la même conclusion.

b) Si (OA_r) et (OB_r) ne sont pas perpendiculaires au plan P_r (voir la figure ci-contre), soit d_r l'intersection avec le plan P_r du plan tangent à S_r en A_r : $S_r(A_r)\setminus\{A_r\}$ est la réunion des cercles intersections de $S_r(A_r)\setminus\{A_r\}$ avec les plans passant par d_r et coupant $]OA_r[$. Si, au contraire, (OA_r) et (OB_r) sont perpendiculaires au plan P_r, on a de la même façon $S_r(A_r)\setminus\{A_r\} = \bigcup_{0<\lambda<1}[(P_i+\lambda\overrightarrow{OA_r})\cap S_r]$: $S_r(A_r)\setminus\{A_r\}$ est la réunion de ses sections par des plans parallèles à P_r. Il en va de même dans le cas de $S_r(B_r)\setminus\{B_r\}$. On a donc :

$$\mathbb{R}^3 = C\cup(\bigcup_{r>0}(\Gamma_r\cup(S_r(A_r)\setminus\{A_r\})\cup(S_r(B_r)\setminus\{B_r\}))).$$

Comme les ensembles $S_r(A_r)\setminus\{A_r\}$ et $S_r(B_r)\setminus\{B_r\}$ sont des réunions de cercles disjoints, il en est de même de $\mathbb{R}^3$, et $A^{(3)}$ est donc vraie.

Problème 32

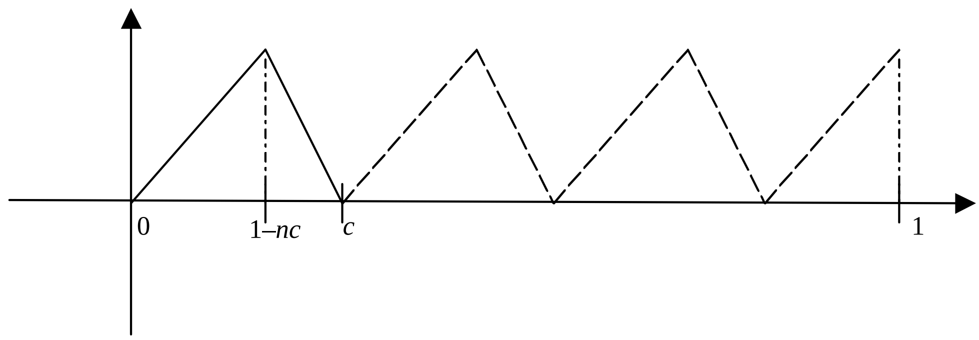
1. Soit $f \in \mathcal{F}$; on a $f(0+1) = f(1) = 0 = f(0)$: $c = 1$ est donc bien une corde universelle.

2. S'il existe $k = 0, 1, \ldots, n-1$ tel que $d_k = 0$, on peut prendre $x = \frac{k}{n}$. Sinon, puisque

$$\textstyle\sum_{0\le k<n} d_k = f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f\left(\frac{n-2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0) = f(1)-f(0) = 0,$$

il existe des entiers k, $\ell \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ tels que $d_k > 0$ et $d_\ell < 0$. L'application $\delta(x) : x \mapsto f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$, qui est continue sur $\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$, change donc de signe entre $x = \frac{k}{n}$ et $x = \frac{\ell}{n}$ (puisque $\delta\left(\frac{k}{n}\right) = d_k$ et $\delta\left(\frac{\ell}{n}\right) = d_\ell$). Par suite, il existe un réel x compris entre $\frac{\ell}{n}$ et $\frac{k}{n}$ tel que $\delta(x) = 0$. On a ainsi $f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x)$, et le réel $c = \frac{1}{n}$ est donc une corde universelle.

3. a) Soit n l'entier tel que $n < \frac{1}{c} < n+1$: on a successivement $nc < 1 < (n+1)c$ et $0 < 1-nc < c$. Soit alors φ_0 l'application affine par morceaux définie sur $[0,c]$ par $\varphi_0(0) = 0$, $\varphi_0(1-nc) = 1$, $\varphi_0(1) = 0$ (voir la figure, où l'on a choisi des unités distinctes sur les axes de coordonnées).



Comme $[0,1] = [0,c]\cup[c,2c]\cup\ldots\cup[(n-1)c,nc]\cup[nc,1]$, on obtient une application φ convenable en posant, pour $x \in [kc,(k+1)c]\cap[0,1]$, et $k = 0, 1, \ldots, n$, $\varphi(x) = \varphi_0(x-kc)$.

b) Posons $f(x) = x - \varphi(x)$: f est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0 - \varphi(0) = 0 - 0 = 0$, $f(1) = 1 - \varphi(1) = 1 - 1 = 0$. Par ailleurs, pour tout $x \in [0,1-c]$, il vient : $f(x+c) = (x+c) - \varphi(x+c) = x + c - \varphi(x) = f(x) + c \neq f(x)$.

Problème 33

1. Supposons p_n défini pour $n \leq 2m–1$; l'intervalle $]a_{p_{2m-2}},a_{p_{2m-1}}[$ étant infini, il existe des entiers $k > p_{2m-1}$ tels que $a_{p_{2m-2}} < a_k < a_{p_{2m-1}}$: on définit alors p_{2m} comme étant le plus petit d'entre eux. De même, supposant p_n défini pour $n \leq 2m$, on définit p_{2m+1} comme étant le plus petit des entiers $k > p_{2m}$ tels que $a_{p_{2m}} < a_k < a_{p_{2m-1}}$. La suite ainsi définie convient.

2. D'après l'axiome des intervalles emboîtés et les propriétés de la suite (a_{p_n}), les segments $\mathrm{I}_m = [a_{p_{2m}},a_{p_{2m+1}}]$ forment une suite décroissante dont l'intersection n'est pas vide. La décroissance étant stricte, on a : $\bigcap_{m\geq 0}]a_{p_{2m}},a_{p_{2m+1}}[= \bigcap \mathrm{I}_m \neq \varnothing$.

3. Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a_q = y$. Soit alors n le plus grand entier tel que $p_n \leq q$, de sorte que $q < p_{n+1}$. Supposons n pair : $n = 2m$. On a :

$$a_{p_{2m-2}} < a_{p_{2m}} < a_q < a_{p_{2m+1}} < a_{p_{2m-1}}.$$

Par suite, p_{2m+1} ($= p_{n+1}$) $> q$ n'est pas le plus petit des entiers $k > p_{2m}$ ($= p_n$) tel que $a_{p_{2m-2}} < a_k < a_{p_{2m-1}}$: contradiction. On procède de manière analogue quand n est impair. Ainsi n'existe-t-il pas d'entier $q \in \mathbb{N}$ tel que $y = a_q$, contrairement à l'hypothèse initiale.

4. Le résultat de la question 1 reste valable. En revanche la démonstration du résultat de la question 2 cesse d'être valide dans $\mathbb{Q}$, puisque l'axiome des intervalles emboîtés n'y est pas vérifié, comme le montre la suite $\mathrm{I}_n = [\alpha_n,\beta_n]$, où (α_n) (respectivement, β_n) est une suite de rationnels croissant (resp., décroissant) strictement vers $\sqrt{2}$.

Problème 34

1. a) Supposons qu'il existe un couple (p, q) où p et q ne sont pas premiers entre eux. Soit n le plus petit entier tel que R_n contienne un tel couple (p, q). On a nécessairement $n \geq 2$. L'un des couples $(p, q–p)$ et $(p–q, q)$ appartient à R_{n-1} ; or chacun de ces couples est constitué d'entiers non premiers entre eux (puisqu'il en est ainsi de (p, q)), en contradiction avec le choix de n.

b) Supposons que certains couples (p, q) d'entiers premiers entre eux n'apparaissent pas parmi les valeurs de s. Soit (p, q) celui d'entre eux pour lequel p et q sont les plus petits possibles. Si $p > q$, alors $(p–q, q)$ n'apparaît pas non plus parmi les valeurs de s, en contradiction avec le choix de (p, q). Si $p < q$, il en est de même de $(p, q–p)$, avec une conclusion analogue.

c) Le couple (1, 1) ne peut apparaître qu'une fois. Supposons alors que, parmi les autres couples possibles, certains apparaissent plusieurs fois dans la suite s. Soit (p, q) un tel couple, avec p et q les plus petits possibles. Si $p < q$, (p, q) est engendré par $(p, q–p)$, qui apparaît donc deux fois au moins, en contradiction avec le choix de (p, q). On raisonne de même lorsque $p > q$.

2. Il suffit de vérifier que si deux couples (p, q) et (p', q') sont des valeurs consécutives de s, alors $q = p'$. La propriété est trivialement vraie pour les valeurs de s appartenant à R_1. Supposons-la vraie pour les valeurs de s appartenant à $\mathrm{R}_1\cup\ldots\cup\mathrm{R}_{n-1}$. Montrons qu'elle est vraie sur $\mathrm{R}_1\cup\ldots\cup\mathrm{R}_{n-1}\cup\mathrm{R}_n$. Soit d'abord (p, q) et (p', q') deux couples consécutifs de R_n ($n \geq 1$). Si ces couples proviennent du même couple (u, v) de R_{n-1} on a $(p, q) = (u, u+v)$ et $(p', q') = (u+v, v)$, en sorte qu'on a bien $q = p'$ ($= u+v$). S'ils proviennent de deux couples consécutifs de R_{n-1}, d'après l'hypothèse de récurrence ces couples s'écrivent (u, v) et (v, w) et on a $(p, q) = (u+v, v)$ et $(p', q') = (v, v+w)$, en sorte que, à nouveau, on a bien $q = p'$ ($= v$). Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer (par une récurrence immédiate) que le premier et le dernier couples de chaque ensemble R_n sont respectivement $(1, n)$ et $(n, 1)$: le dernier élément de R_{n-1} est donc $(n–1, 1)$ et le premier de R_n est $(1, n)$: la propriété est là encore vérifiée. Il résulte alors de la question 1 que la suite $\left(\dfrac{f(k-1)}{f(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ énumère $\mathbb{Q}_+^*$.

Problème 35

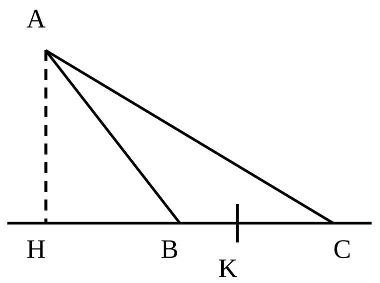
1. a) Soit $\mathrm{H} \in [\mathrm{BC}]$ et $\mathrm{M} \in [\mathrm{AH}]$. Il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que H soit le barycentre de (B,α) et $(\mathrm{C},1–\alpha)$, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1–\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Il existe $k \in [0,1]$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AH}}$. On a alors : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1–\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = k\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k(1–\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Posons $\lambda = k\alpha$, $\mu = k\,(1–\alpha)$. On a $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\mu\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Puisque $0 \leq k \leq 1$ et $0 \leq \alpha$, $1–\alpha \leq 1$, on a $0 \leq k\alpha$, $k\,(1–\alpha) \leq 1$, soit $0 \leq \lambda$, $\mu \leq 1$. Par ailleurs $\lambda+\mu = k\alpha + k\,(1–\alpha) = k \leq 1$. Ainsi $\mathrm{M} \in \{\ \mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 /\ \exists$

$(\lambda,\mu) \in [0,1]^2$ tel que $\lambda+\mu \leq 1$ et $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ }. Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ avec $(\lambda,\mu) \in [0,1]^2$ et $\lambda+\mu \leq 1$. Si $\lambda+\mu = 0$, alors $M = A \in ABC$. Sinon, soit H défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AM}$, où $k = \frac{1}{\lambda+\mu}$. Comme $\overrightarrow{AH} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AC}$, H est le barycentre de (B,α) et de $(C,1-\alpha)$, où $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Comme $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AH}$, avec $k = \lambda+\mu \in [0,1]$, on a donc $M \in ABC$.

b) Soit χ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui, à tout $M \in \mathbb{R}^2$, fait correspondre $\chi(M) = (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, où λ et μ sont les coordonnées de M dans le repère affine (A,B,C) : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$. L'ensemble $T = \{ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda+\mu \leq 1 \}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de l'intervalle fermé $]-\infty,1]$ par l'application linéaire, et donc continue, $(\lambda,\mu) \mapsto \lambda+\mu$. De même $[0,1]^2$ est fermé. Or on a $ABC = \chi^{-1}(T\cap[0,1]^2)$: χ étant continue, ABC est fermé. Par ailleurs, pour M tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, on a $AM \leq |\lambda|AB + |\mu|AC \leq (|\lambda|+|\mu|)\max(AB,AC)$. Si $M \in ABC$, c'est-à-dire si $(\lambda,\mu) \in [0,1]^2$ et $\lambda+\mu \leq 1$, on a $|\lambda|+|\mu| = \lambda+\mu \leq 1$. Par suite, $AM \leq \max(AB,AC)$. La plaque ABC, qui est incluse dans le disque fermé de centre A et de rayon max(AB,AC), est donc bornée. Il en résulte que ABC est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

3. Puisque $M \in (BC)_{(A)}$,]AM[coupe (BC) en un point H. Comme $M \in (CA)^{(B)}$, H n'est pas sur la demi-droite ouverte portée par (BC), d'extrémité C et qui ne contient pas B ; et de même, puisque $M \in (AB)^{(C)}$, H n'est pas sur la demi-droite ouverte portée par (BC), d'extrémité B et qui ne contient pas C. Par suite, $H \in [BC]$. On a donc : MA+MB+MC = MH+HA+MB+MC > MH+HA+BC = MH + (HA+HB+HC) > HA+HB+HC. Ce résultat vaut de même lorsque $M \in (BC)^{(A)}\cap(CA)_{(B)}\cap(AB)^{(C)}$ et lorsque $M \in (BC)^{(A)}\cap(CA)^{(B)}\cap(AB)_{(C)}$. Pour tout point $M \in \mathbb{R}^2\backslash ABC$, il existe donc $H \in ABC$ tel que MA+MB+MC > HA+HB+HC. Par suite, on a : $\inf \{ f(M) / M \in \mathbb{R}^2 \} = \inf \{ f(M) / M \in ABC \}$. Comme ABC est compact et f continue, il existe $P \in ABC$ tel que $f(P) = \inf \{ f(M) / M \in \mathbb{R}^2 \}$.

4. a) On a $\varphi(x) = AH - x + \sqrt{HB^2+x^2} + \sqrt{HC^2+x^2}$ et donc $\varphi(0) = AH + HB + HC$. Il vient $\varphi'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{HB^2+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{HC^2+x^2}}$ et donc $\varphi'(0) = -1$. Comme φ' est continue en 0, on a $\varphi' < 0$ dans un voisinage V de 0 dans [0,AH], et on a donc, pour x assez petit, $\varphi(x)-\varphi(0) = \int_0^x \varphi'(u)du < 0$, soit $\varphi(x) < \varphi(0)$, c'est-à-dire PA+PB+PC < HA+HB+HC. L'application f n'atteint donc pas son minimum en H.



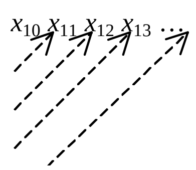
b) La conclusion précédente reste *a fortiori* vraie pour tout point K de]BC[autre que H, puisque alors AK > AH, et donc $f(K) > f(H)$. Dans le cas où le projeté orthogonal H de A sur (BC) est extérieur à]BC[, on a, pour tout $K \in]BC[$, $f(K) > f(B)$, en supposant que B est plus proche de H que C (voir la figure). Ces conclusions valant pour les deux autres côtés, f ne peut atteindre son minimum en aucun point de $]AB[\cup]BC[\cup]CA[$.

Problème 36

1. L'ensemble $\{ f(x') / x' \in I\cap]-\infty, x[\}$ est majoré par $f(x)$: notons $f(x_-)$ sa borne supérieure. Soit alors $\varepsilon > 0$ et soit $x' \in I\cap]-\infty, x[$ tel que $f(x_-)-f(x') < \varepsilon$; pour tout $t \in [x',x[$, on a $f(x_-)-f(t) \leq f(x_-)-f(x') < \varepsilon$. Par suite, $\lim_{t\uparrow x} f(t) = f(x_-)$. On démontre de même que $\lim_{t\downarrow x} f(t) = f(x_+)$, où $f(x_+) = \inf \{ f(x') / x' \in I\cap]x, +\infty[\}$.

2. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe m points $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ appartenant à $D_n(a,b)$. On a : $f(a) \leq f(x_{1-}) \leq f(x_{1+}) \leq f(x_{2-}) \leq f(x_{2+}) \leq \ldots \leq f(x_{m-}) \leq f(x_{m+}) \leq f(b)$. Il vient donc : $f(b) - f(a) = f(b)-f(x_{m+}) + f(x_{m+})-f(x_{m-}) + \ldots + f(x_{2+})-f(x_{2-}) + f(x_{2-})-f(x_{1+}) + f(x_{1+})-f(x_{1-}) + f(x_{1-})-f(a) \geq f(x_{m+})-f(x_{m-}) + \ldots + f(x_{2+})-f(x_{2-}) + f(x_{1+})-f(x_{1-}) > m\frac{1}{n}$. On a ainsi $m < n\,(f(b)-f(a))$. Par suite $D_n(a, b)$ est fini.

3. a) Si E_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on énumère successivement les éléments de E_1, $E_2\backslash E_1$, $E_3\backslash E_1\cup E_2$, etc. Si l'un des E_n est infini, par exemple E_1, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n^{\#} = E_n\cup F$ avec $F = E_1$ si E_n est fini, et $F = \varnothing$ sinon. On a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n^{\#} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = E$. Avec des notations évidentes, on a alors l'énumération suivante, où l'on ignore les éléments déjà rencontrés :



$$\begin{array}{l} x_{20}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{23}\ \dots \\ x_{30}\ x_{31}\ x_{32}\ x_{33}\ \dots \\ x_{40}\ x_{41}\ x_{42}\ x_{43}\ \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

b) La suite $\frac{1}{n}$ tendant vers 0, on a $D(a, b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n(a, b)$. Les ensembles $D_n(a, b)$ étant finis, l'ensemble réunion $D(a, b)$ est fini ou dénombrable.

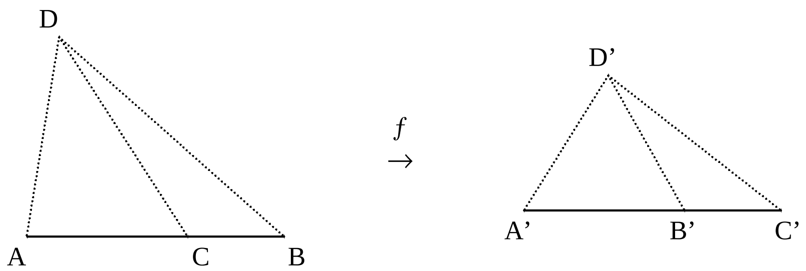
c) Supposons que l'on ait $I =]\alpha,\beta[$. On a alors $D_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D(\alpha-n^{-1},\beta+n^{-1})$: d'après les résultats précédents, D_f est fini ou dénombrable. Si $I =]\alpha, +\infty[$, on a de même $D_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D(\alpha-n^{-1}, n)$, etc.

Problème 37

I. 1. Soit A, B $\in \mathcal{P}$ avec A $\neq$ B. Soit C $\notin$ (AB). On a a(ABC) > 0 et donc a(A'B'C') > 0 ; par suite, A' $\neq$ B'. L'application f est donc injective.

2. On a : A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ a(ABC) = 0 $\Leftrightarrow$ a(A'B'C') = 0 $\Leftrightarrow$ A', B', C' alignés.

3. Soit D $\notin$ (AB) ; on a a(ADC) < a(ADB). Supposons que C'appartienne à la demi-droite ouverte d'origine B' ne contenant pas A' (voir ci-après). On a alors a(A'D'C') > a(A'D'B'), et donc a(ADC) > a(ADB) : contradiction. Par suite, C' $\in$]B'A'). On montre de même que C' $\in$]A'B'). Finalement, C' $\in$]A'B'[.



4. Soit D $\notin$ (AB), h la distance de D à (AB), h' la distance de D' à (A'B'). Si $\lambda \in]0,1[$, on a C $\in$]AB[et donc C' $\in$]A'B'[. Dans ces conditions, on a :

C = λA+(1–λ)B $\Leftrightarrow$ λAC = (1–λ)CB $\Leftrightarrow$ $\lambda\frac{1}{2}h$AC = (1–λ)$\frac{1}{2}h$CB $\Leftrightarrow$ λa(ADC) = (1–λ)a(CDB) $\Leftrightarrow$ λa(A'D'C') = (1–λ)a(C'D'B') $\Leftrightarrow$ $\lambda\frac{1}{2}h$'A'C' = (1–λ)$\frac{1}{2}h$'C'B' $\Leftrightarrow$ λA'C' = (1–λ)C'B' $\Leftrightarrow$ C' = λA'+(1–λ)B'.

Si $\lambda > 1$, on a : C = λA+(1–λ)B $\Leftrightarrow$ A = $\frac{\lambda-1}{\lambda}$B+$\frac{1}{\lambda}$C = μB+(1–μ)C, où $\mu = \frac{\lambda-1}{\lambda} \in]0, 1[$; par suite, A' = μB'+(1–μ)C' = $\frac{\lambda-1}{\lambda}$B'+$\frac{1}{\lambda}$C', soit donc C' = λA'+(1–λ)B'. Si $\lambda < 1$, on procède de même, en échangeant A et B. Les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ sont triviaux. Il résulte de là que f est une application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même. Comme f est bijective, c'est une bijection affine.

II. Si f conserve l'aire, f est affine. Soit alors A, B, C $\in \mathcal{P}$ non alignés. On a : a(ABC) = a(A'B'C') = $|\det u|\cdot a$(ABC). Comme a(ABC) > 0, il vient $|\det u| = 1$, soit $\det u = \pm 1$. Inversement, si f est affine et $\det u = \pm 1$, on a a(A'B'C') = $|\det u|\cdot a$(ABC) = a(ABC), pour tout (A, B, C) $\in \mathcal{P}^3$.

III. 1. Soit (k, 1) le couple des coordonnées de K. Les points O, I, J étant non alignés, il existe une unique application affine u telle que u(O) = O, u(I) = I, u(J) = K. Soit

$$\begin{cases} x' = \alpha x+\beta y \\ y' = \gamma x+\delta y \end{cases}$$

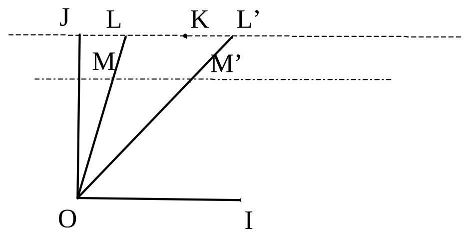
l'expression analytique de u dans (O, I, J). Pour $y = 0$, on a $x' = \alpha x = x$ et $y' = \gamma x = 0$; prenons $x \neq 0$: il vient $\alpha = 1$ et $\gamma = 0$. L'expression de u est alors :

$$\begin{cases} x' = x+\beta y \\ y' = \delta y \end{cases}$$

Pour $x = 0$ et $y = 1$, on a donc $x' = \beta = k$ et $y' = \delta = 1$. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} x' = x+ky \\ y' = y \end{cases}$$

Il vient : $\det u = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Par suite, u conserve l'aire.



2. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ est constant sur les parallèles à (OI). Si M $\in$ (JK), on a $\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \overrightarrow{\mathrm{JK}}$: le point M' s'obtient par un simple transport de distance. Sinon, soit L l'intersection de (OM) avec (JK) et soit L' = u(L) : u transforme (OL) = (OM) en (OL'), droite qui coupe la parallèle à (OI) passant par M au point M' demandé.

Problème 38

I. 1. Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ satisfaisant les conditions de $\mathfrak{R}_1$. Posons $\mathcal{P}^* = \{ k \in \mathbb{N} \,/\, [0, k]\cap\mathbb{N} \subset \mathcal{P} \}$. On a $0 \in \mathcal{P}^*$. Pour tout $k \in \mathcal{P}^*$, on a $[0, k]\cap\mathbb{N} \subset \mathcal{P}$, et donc d'une part $[0, k-1]\cap\mathbb{N} \subset \mathcal{P}$, soit $k-1 \in \mathcal{P}^*$, d'autre part $[0, k+1]\cap\mathbb{N} \subset \mathcal{P}$ (puisque $k+1 \in \mathcal{P}$ dès que $k \in \mathcal{P}$), soit $n(k) = k+1 \in \mathcal{P}^*$. Par suite, d'après $\mathfrak{R}_C$, on a $\mathcal{P}^* = \mathbb{N}$, et donc $\mathcal{P} = \mathbb{N}$.
2. Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ satisfaisant aux conditions $\mathfrak{R}_C$. En vertu de $\mathfrak{R}_1$, la suite $(n^i(0))_{i\in\mathbb{N}}$ suggérée par l'énoncé est bien définie puisque $n^0(0) = 0 \in \mathcal{P}$ et que, pour $i \geq 0$, si $n^i(0) \in \mathcal{P}$ alors $n^{i+1}(0) = n(n^i(0)) \in \mathcal{P}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons alors $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}\cap[0,n^i(0)]$. On a bien $\mathcal{P}_i \subset [0,n^i(0)]\cap\mathbb{N}$, et $n^i(0) \in \mathcal{P}$. Si $k \in\ ]0,n^i(0)]\cap\mathcal{P}_i$, on a $k \in \mathcal{P}$, et donc $k-1 \in \mathcal{P}$, soit $k-1 \in \mathcal{P}_i$: d'après $\mathfrak{R}_2$, on a $\mathcal{P}_i = [0,n^i(0)]\cap\mathbb{N}$. Comme $\mathcal{P} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_i$, on a : $\mathcal{P} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} ([0,n^i(0)]\cap\mathbb{N}) = (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [0,n^i(0)])\cap\mathbb{N} = \mathbb{N}$.

II. 1. Posons $x = x_1-\mathrm{i}x_2$ et $y = y_1+\mathrm{i}y_2$. On a d'abord $|xy|^2 = |x|^2|y|^2 = (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$. Par ailleurs il vient : $xy = (x_1-\mathrm{i}x_2)(y_1+\mathrm{i}y_2) = (x_1y_1+x_2y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)$. On a donc : $|xy|^2 = (x_1y_1+x_2y_2)^2 + (x_1y_2-x_2y_1)^2$. D'où l'égalité demandée.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y_n = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, et soit $\mathcal{I}_n$ l'inégalité de Cauchy correspondante. Posons

$$\mathcal{P} = \{0\}\cup\{ n \in \mathbb{N}^* \,/\, \mathcal{I}_n \text{ vraie pour tous } X_n \text{ et } Y_n \in \mathbb{R}^n \}.$$

D'après le résultat de la question I.1, on a : $(x_1y_1+x_2y_2)^2 \leq (x_1y_1+x_2y_2)^2 + (x_1y_2-x_2y_1)^2 = (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$. On a donc $2 \in \mathcal{P}$. Supposons que $n \in \mathcal{P}$, $n \geq 1$; montrons alors que $2n \in \mathcal{P}$. En utilisant $\mathcal{I}_2$ sous la forme $x_1y_1+x_2y_2 \leq (x_1^2+x_2^2)^{1/2}(y_1^2+y_2^2)^{1/2}$ on obtient :

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_{2n}y_{2n})^2 = [(x_1y_1+x_2y_2)+(x_3y_3+x_4y_4)+\ldots+ (x_{2n-1}y_{2n-1}+x_{2n}y_{2n})]^2$$
$$\leq [(x_1^2+x_2^2)^{1/2}(y_1^2+y_2^2)^{1/2} +(x_3^2+x_4^2)^{1/2}(y_3^2+y_4^2)^{1/2}+\ldots+(x_{2n-1}^2+x_{2n}^2)^{1/2}(y_{2n-1}^2+y_{2n}^2)^{1/2}]^2.$$

L'application de $\mathcal{I}_n$ à l'expression élevée au carré dans le second membre de l'inégalité donne, avec des notations évidentes (voir les soulignements) :

$$\begin{aligned}(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_{2n}y_{2n})^2 &\leq \underline{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}\,\underline{(y_1^2+y_2^2)^{1/2}}+(x_3^2+x_4^2)^{1/2}(y_3^2+y_4^2)^{1/2}+\ldots+(x_{2n-1}^2+x_{2n}^2)^{1/2}(y_{2n-1}^2+y_{2n}^2)^{1/2} \\ &= \underline{u_1}\,\underline{v_1}+u_2v_2+\ldots+u_nv_n \leq (u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2)(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2) \\ &= ((x_1^2+x_2^2)+(x_3^2+x_4^2)+\ldots+(x_{2n-1}^2+x_{2n}^2))\ ((y_1^2+y_2^2)+(y_3^2+y_4^2)+\ldots+(y_{2n-1}^2+y_{2n}^2)) \\ &= (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2n-1}^2+x_{2n}^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{2n-1}^2+y_{2n}^2).\end{aligned}$$

On a donc bien $2n \in \mathcal{P}$. Par ailleurs, si $n \in \mathcal{P}$, on a pour tous X_n, $Y_n \in \mathbb{R}^n$

$$(x_1y_1+\ldots+x_{n-1}y_{n-1}+x_ny_n)^2 \leq (x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2+y_n^2).$$

En faisant $x_n = y_n = 0$, on obtient, pour tous X_{n-1}, $Y_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$(x_1y_1+\ldots+x_{n-1}y_{n-1})^2 \leq (x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)(y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2).$$

On a donc $n-1 \in \mathcal{P}$. En conséquence, et en vertu de $\mathfrak{R}_C$, on a $\mathcal{P} = \mathbb{N}$, CQFD.

Problème 39

I. On a $(\lambda f+\mu g)(\alpha) = (\lambda f)(\alpha) + (\mu g)(\alpha) = \lambda f(\alpha) + \mu g(\alpha)$ et $(f\cdot g)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$.

II. 1. On a $1\cdot 1 = 1$ et donc $\varphi(1) = \varphi(1\cdot 1) = \varphi(1)\varphi(1)$. Si l'on avait $\varphi(1) = 0$, on aurait aussi, pour tout $f \in C(\mathbb{R})$, $\varphi(f) = \varphi(f1) = \varphi(f)\varphi(1) = 0$. Comme $\varphi \neq 0$ on a $\varphi(1) \neq 0$: l'égalité $\varphi(1) = \varphi(1)\varphi(1)$ entraîne donc que $\varphi(1) = 1$.

2. Si $\varphi(f) = f(\alpha)$ et si $f(\alpha) = 0$, alors $\varphi(f) = 0$. Inversement, supposons que, si $f(\alpha) = 0$, alors $\varphi(f) = 0$. Soit $f \in C(\mathbb{R})$; on a : $\varphi(f)-f(\alpha) = \varphi(f)-f(\alpha)\varphi(1) = \varphi(f)-\varphi(f(\alpha)1) = \varphi(f-f(\alpha)1)$. Comme $(f-f(\alpha)1)(\alpha) = f(\alpha)-f(\alpha) = 0$, on a $\varphi(f-f(\alpha)1) = 0$, et, par suite, $\varphi(f) = f(\alpha)$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$, posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-\alpha}$, et posons en outre $g(\alpha) = 0$. Comme $f \in C(\mathbb{R})$, g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$. Comme f est nulle sur un voisinage de α, $\lim\limits_{x\to\alpha,\, x\neq\alpha} g(x) = 0$: g est donc continue en α. Il vient alors : $\varphi(f) = \varphi(g)\varphi(\mathrm{I}-\alpha 1)$. Comme $(\mathrm{I}-\alpha 1)(\alpha) = 0$, on a $\varphi(\mathrm{I}-\alpha 1) = 0$ et donc $\varphi(f) = 0$.

4. a) Si $\varphi(f) \neq 1$, soit $g = \dfrac{f}{\varphi(f)}$: on a $g \in C(\mathbb{R})$, $g(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\varphi(f)} = 0$ et $\varphi(g) = \varphi\left(\dfrac{f}{\varphi(f)}\right) = \dfrac{\varphi(f)}{\varphi(f)} = 1$.

b) L'application f étant continue et nulle en α, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, si $x \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ alors $|f(x)| < 1$. Posons $h(x) = f(x)$ pour $x \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, $h(x) = f(\alpha-\varepsilon)$ pour $x \in]-\infty, \alpha-\varepsilon[$, $h(x) = f(\alpha+\varepsilon)$ pour $x \in]\alpha+\varepsilon,+\infty[$: on a $h \in C(\mathbb{R})$, $h(x) = f(x)$ pour tout x dans un voisinage de α, et $|h(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Comme $|h(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $(1-h)^{-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. L'égalité $1 = (1-h)^{-1}(1-h)$ conduit alors à $1 = \varphi(1) = \varphi((1-h)^{-1}(1-h)) = \varphi((1-h)^{-1})\varphi(1-h)$. Comme $f-h$ est nulle sur un voisinage de α, on a $\varphi(f-h) = 0$, et, puisque $\varphi(f-h) = \varphi(f)-\varphi(h)$, il vient $\varphi(h) = \varphi(f) = 1$. On a ainsi : $\varphi(1-h) = \varphi(1)-\varphi(h) = 1-\varphi(h) = 0$. On aboutit ainsi à l'égalité absurde $1 = 0$. Par suite, l'hypothèse qu'il existerait $f \in C(\mathbb{R})$ telle que $f(\alpha) = 0$ et $\varphi(f) \neq 0$ doit être rejetée. Il en résulte que, quelle que soit $f \in C(\mathbb{R})$, on a $\varphi(f) = f(\alpha)$.

Problème 40

1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et soit f l'application de E dans E qui à $x \in \mathrm{E}$ associe $f(x) = \cos\circ x$. Soit en outre $a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. D'après le résultat indiqué, il existe une suite unique u à valeurs dans E telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

soit ici

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos\circ u_n \end{cases}$$

Si l'on pose $u_n = \cos^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$), il vient donc :

$$\begin{cases} \cos^{(0)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \cos^{(n+1)} = \cos\circ \cos^{(n)} \end{cases}.$$

2. a) L'application cos étant continue, on a :

$$\xi = \lim_{n\to\infty} \cos^{(n+1)}(x) = \lim_{n\to\infty} \cos(\cos^{(n)}(x)) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \cos^{(n)}(x)\right) = \cos \xi.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\cos^{(n+1)}(x) - (\cos^{(n+1)}(y) = \cos(\cos^{(n)}(x)) - \cos(\cos^{(n)}(y)).$$

Par ailleurs, pour tous α, $\beta \in \mathrm{I} = [-1, 1]$, on a :

$$|\cos \alpha - \cos \beta| \leq \sup_{\gamma \in I} |\sin'(\gamma)||\alpha - \beta|.$$

Posons $k = \sup_{\gamma \in I} |\sin'(\gamma)|$; on a bien $k < 1$. En prenant $\alpha = \cos^{(n)}(x)$ et $\beta = \cos^{(n)}(y)$, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|\cos^{(n+1)}(x) - \cos^{(n+1)}(y)| \leq k\,|\cos^{(n)}(x) - \cos^{(n)}(y)|.$$

Par une récurrence immédiate on a ainsi :

$$|\cos^{(n+1)}(x) - \cos^{(n+1)}(y)| \leq k^n\,|\cos(x) - \cos(y)|.$$

c) L'inégalité précédente entraîne que, s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(\cos^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite, alors $(\cos^{(n)}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ a la même limite quel que soit $y \in \mathbb{R}$. Admettons un instant l'existence d'un réel ξ tel que $\xi = \cos \xi$ et posons $y = \xi$; on a $\cos^{(n)}(y) = \xi$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et l'inégalité

$$|\cos^{(n+1)}(x) - \cos^{(n+1)}(y)| \leq k^n\,|\cos(x) - \cos(y)|$$

devient :

$$|\cos^{(n+1)}(x) - \xi| \leq k^n\,|\cos(x) - \xi|.$$

Par suite $(\cos^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ξ. Il résulte de là, en particulier, que si le réel ξ existe, il est unique. Montrons-en l'existence, ce qui achèvera la démonstration de *C*. L'application

$$x \mapsto \varphi(x) = x - \cos x$$

est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (sa dérivée est $1+\sin x$) ; comme $\varphi(0) = -1$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-2\sqrt{2}}{2} > 0$, φ s'annule entre 0 et $\frac{\pi}{4} = 0{,}78\ldots$ La conjecture *C* est démontrée.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\cos^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ définie plus haut se révèle donc être telle que toutes les suites *numériques* $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, où $x \in \mathbb{R}$, convergent et ont même limite, à savoir le nombre solution de l'équation $x = \cos x$, dont une valeur approchée est

$$x^* = 0{,}7390851332151606416553120876738 73.$$

Parmi les sujets proposés aux épreuves orales du CAPES 2000 où l'on pouvait exploiter le matériel mathématique précédent, on doit citer d'abord le sujet n° 62 de *l'épreuve d'exposé* :

62. Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

À cela on ajoutera plusieurs des sujets proposés à *l'épreuve sur dossier* :

▮▮ 50. Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale.

▮▮ 51. Exemples d'approximation d'un point fixe d'une fonction à l'aide d'une suite. Étude de cette suite. Mise en évidence de l'obtention de la précision visée.

▮▮ 52. Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.

▮▮ 53. Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique.

Problème 41

I. 1. On a : $u = u+v+(-v)$ et donc $|u| \leq |u+v| + |-v| = |u+v| + |v|$; il vient ainsi : $|u|-|v| \leq |u+v|$. En échangeant u et v, on obtient de même : $-(|u|-|v|) \leq |u+v|$. Il vient alors : $||u|-|v|| = \max(|u|-|v|, -(|u|-|v|)) \leq |u+v|$.

Remarque. On peut procéder autrement, en utilisant la structure de corps de $\mathbb{C}$ (alors que la démonstration précédente est valable sur tout espace vectoriel normé) ; on a d'abord : $|u+v| \geq ||u|-|v|| \Leftrightarrow |u+v|^2 \geq (|u|-|v|)^2 \Leftrightarrow (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) \geq |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \Leftrightarrow u\overline{u}+u\overline{v}+v\overline{u}+v\overline{v} \geq u\overline{u} + v\overline{v} - 2\sqrt{u\overline{u}v\overline{v}} \Leftrightarrow v\overline{u}+v\overline{v} + 2\sqrt{u\overline{u}v\overline{v}} \geq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^2 = u\overline{v}$; on a $\overline{\alpha}^2 = \overline{\alpha^2} = \overline{u}v$, d'où $u\overline{v}+v\overline{u} = \alpha^2 + \overline{\alpha}^2$ et $\sqrt{u\overline{u}v\overline{v}} = \alpha\overline{\alpha}$. Il vient donc : $v\overline{u}+v\overline{v} + 2\sqrt{u\overline{u}v\overline{v}} = \alpha^2 + \overline{\alpha}^2 + 2\alpha\overline{\alpha} = (\alpha + \overline{\alpha})^2 \in \mathbb{R}_+$, CQFD.

2. On a $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = z^n\left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n\right)$. En posant $u = a_n$ et $v = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z}$ dans l'inégalité démontrée dans la question 1, il vient :

$$|P(z)| = |z|^n\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n\right| \geq |z|^n\left||a_n| - \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z}\right|\right|.$$

On a en outre : $\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \leq \frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|}$. Par suite, il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, si $|z| > \mu$, alors $\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \leq \frac{|a_n|}{2}$, et donc $|P(z)| \geq |z|^n \frac{|a_n|}{2}$. Soit alors $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\rho \geq \mu$, tel que, si $|z| > \rho$, alors $|z|^n \frac{|a_n|}{2} \geq K$: il résulte de ce qui précède que ρ répond à la question.

3. Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et soit $K = |P(z_1)|$; d'après la question 2, il existe donc $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, si $|z| > \rho$, alors $|P(z)| \geq |P(z_1)|$. L'application $z \mapsto |P(z)|$ étant continue, elle possède, sur le disque compact $\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq \rho \}$, un minimum qu'elle atteint en un point $z_2 \in \mathcal{D}$. Posons $z_0 = z_1$ si $|P(z_1)| \leq |P(z_2)|$, $= z_2$ sinon, en sorte que $|P(z_0)| = \min(|P(z_1)|, |P(z_2)|)$. Soit $z \in \mathbb{C}$; si $|z| > \rho$, on a $|P(z)| \geq |P(z_1)| \geq |P(z_0)|$; si $|z| \leq \rho$, on a $|P(z)| \geq |P(z_2)| \geq |P(z_0)|$: le nombre complexe z_0 répond donc à la question. Posons alors $P_0(z) = P(z+z_0)$; il est clair que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|P_0(z)| = |P(z+z_0)| \geq |P(z_0)| = |P_0(0)|$, et que, par ailleurs, P possède une racine dans $\mathbb{C}$ si et si seulement si il en est de même de P_0.

II. 1. Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, où $z, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, avec $a_n \neq 0$. Soit m le premier entier $k = 1, 2, \dots, n$ tel que $a_k \neq 0$; en posant $a = a_0$ et $b = a_m$ et en supposant $m < n$, il vient :

$$\begin{aligned}P(z) &= a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = a + bz^m + (a_{m+1}z^{m+1} + \dots + a_n z^n)\\ &= a + bz^m + z^{m+1}(a_{m+1} + \dots + a_n z^{n-m-1}) = a + bz^m + z^{m+1}Q(z),\end{aligned}$$

où $Q(z) = a_{m+1} + \dots + a_n z^{n-m-1}$. Dans le cas où $m = n$, l'égalité demandée a lieu avec $Q = 0$.

2. On a : $P(\lambda\omega) = a + b(\lambda\omega)^m + (\lambda\omega)^{m+1}Q(\lambda\omega) = a + b\omega^m\lambda^m + (\lambda\omega)^{m+1}Q(\lambda\omega) = a + b\left(-\frac{a}{b}\right)\lambda^m + (\lambda\omega)^{m+1}Q(\lambda\omega) = (1-\lambda^m)a + (\lambda\omega)^{m+1}Q(\lambda\omega)$. Il vient alors : $|P(\lambda\omega)| \leq (1-\lambda^m)|a| + \lambda^{m+1}|\omega^{m+1}Q(\lambda\omega)|$. L'inégalité $|Q(\lambda\omega)| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n\omega^{n-m-1}|$ implique que $\lambda|\omega^{m+1}Q(\lambda\omega)| = \lambda|\omega|^{m+1}|Q(\lambda\omega)|$ a pour limite 0 quand λ tend vers 0 selon]0, 1[. On peut donc choisir λ assez proche de 0 pour que l'on ait $\lambda|\omega^{m+1}Q(\lambda\omega)| < |a|$. Il vient alors :

$$|P(\lambda\omega)| \leq (1-\lambda^m)|a| + \lambda^{m+1}|\omega^{m+1}Q(\lambda\omega)| < (1-\lambda^m)|a| + \lambda^m|a| = |a|.$$

Comme $|a| = P(0)$, on aurait ainsi $|P(\lambda\omega)| < |P(0)|$, en contradiction avec l'hypothèse. Par suite, on a $a = 0$, soit $P(0) = 0$: le théorème de d'Alembert est démontré.

Problème 42

1. La limite qu'on peut avancer conjecturalement est $\lambda_0 = 100$. On a bien : $111 - \frac{1130}{\lambda_0} + \frac{3000}{\lambda_0^2} = 111 - 11{,}3 + 0{,}3 = 100 = \lambda_0$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant supposée convergente, elle est implicitement supposée définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En multipliant l'égalité (♥) par $u_n u_{n-1}$ on a : $u_{n+1}u_n u_{n-1} = 111u_n u_{n-1} - 1130u_{n-1} + 3000$. En passant à la limite dans cette égalité on obtient l'égalité demandée : $\lambda^3 = 111\lambda^2 - 1130\lambda + 3000$. Cette dernière étant vérifiée pour $\lambda = 100$, on a : $\lambda^3 = 111\lambda^2 - 1130\lambda + 3000 \Leftrightarrow \lambda^3 - 100^3 = (111\lambda^2 - 1130\lambda + 3000) - (111\times100^2 - 1130\times100 + 3000) \Leftrightarrow \lambda^3 - 100^3 = 111\,(\lambda^2-100^2) - 1130\,(\lambda-100) + 3000-3000 \Leftrightarrow (\lambda-100)(\lambda^2+100\lambda+100^2) = 111\,(\lambda-100)\,(\lambda+100) - 1130\,(\lambda-100) \Leftrightarrow (\lambda-100)[(\lambda^2+100\lambda+100^2) - 111\,(\lambda+100) + 1130] = 0 \Leftrightarrow (\lambda-100)[\lambda^2 - 11\,(\lambda+100) + 1130] = 0 \Leftrightarrow (\lambda-100)(\lambda^2 - 11\lambda + 30) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-100)(\lambda-5)(\lambda-6) = 0$. Les solutions de l'équation $\lambda^3 = 111\lambda^2 - 1130\lambda + 3000$ sont donc $\lambda = 100$, $\lambda = 5$ et $\lambda = 6$: telles sont les limites *a priori* possibles d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Posons $\varphi(n) = \dfrac{4\times5^{n+1} - 3\times6^{n+1}}{4\times5^n - 3\times6^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\varphi(0) = \dfrac{4\times5 - 3\times6}{4-3} = 2$ et $\varphi(1) = \dfrac{4\times5^2 - 3\times6^2}{4\times5 - 3\times6} = \dfrac{-8}{2} = -4$. Supposons qu'on ait $u_{n-1} = \varphi(n-1)$ et $u_n = \varphi(n)$; il vient : $u_{n+1} = 111 - \dfrac{1130}{u_n} + \dfrac{3000}{u_n u_{n-1}} = 111 - 1130\times\dfrac{4\times5^n - 3\times6^n}{4\times5^{n+1} - 3\times6^{n+1}} + 3000\times\dfrac{4\times5^n - 3\times6^n}{4\times5^{n+1} - 3\times6^{n+1}}\times\dfrac{4\times5^{n-1} - 3\times6^{n-1}}{4\times5^n - 3\times6^n}$. D'où : $(4\times5^{n+1} - 3\times6^{n+1})u_{n+1} = 111(4\times5^{n+1} - 3\times6^{n+1}) - 1130(4\times5^n - 3\times6^n) + 3000(4\times5^{n-1} - 3\times6^{n-1}) = (111\times5^2 - 1130\times5 + 3000)(4\times5^{n-1}) - (111\times6^2 - 1130\times6 + 3000)(3\times6^{n-1}) = 125\times(4\times5^{n-1}) - 216\times(3\times6^{n-1}) = 5^3\times(4\times5^{n-1}) - 6^3\times(3\times6^{n-1}) = 4\times5^{n+2} - 3\times6^{n+2}$. On a ainsi : $u_{n+1} = \dfrac{4\times5^{n+2} - 3\times6^{n+2}}{4\times5^{n+1} - 3\times6^{n+1}} = \varphi(n+1)$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \varphi(n) = \dfrac{4\times5^{n+1} - 3\times6^{n+1}}{4\times5^n - 3\times6^n}$. Il vient alors :

$$u_n = \frac{4\times5^{n+1} - 3\times6^{n+1}}{4\times5^n - 3\times6^n} = \frac{6^{n+1}\left(4\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} - 3\right)}{6^n\left(4\left(\frac{5}{6}\right)^n - 3\right)}.$$

La limite de la suite est donc 6 (et non 100, comme on avait pu le croire plus haut).

Problème 43

1. a) Pour $i \le n$, on a $(X^n)^{(i)} = \dfrac{n!}{(n-i)!}X^{n-i}$; lorsque $i \le k < n$, le polynôme X^{n-i} s'annule en 0. Il en est donc de même de $C_k^i(X^n)^{(i)}((1-X)^n)^{(k-i)}$. Pour $k-i \le n$, on a $((1-X)^n)^{(k-i)} = (-1)^{k-i}\dfrac{n!}{(n-k+i)!}(1-X)^{n-(k-i)}$: pour $i \le k < n$, $(1-X)^{n-(k-i)}$ s'annule en 1, et il en est donc de même de $C_k^i(X^n)^{(i)}((1-X)^n)^{(k-i)}$. Comme ces conclusions valent pour $i = 0, 1, \dots, k$, on a $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(1) = 0$.

b) Le polynôme P_n étant de degré $2n$, $P_n^{(n)}$ est de degré n. D'après la formule de Leibniz, on a : $P_n^{(n)}(X) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_n^i(X^n)^{(i)}((1-X)^n)^{(n-i)}$. Pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, $(X^n)^{(i)}$ s'annule en 0, tandis que $(X^n)^{(n)}$ est le polynôme constant égal à $n!$; on a donc $P_n^{(n)}(0) = \dfrac{1}{n!}n! = 1$. Par ailleurs, il vient : $P_n^{(n)}(X) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\dfrac{n!}{i!(n-i)!}\dfrac{n!}{(n-i)!}X^{n-i}(-1)^{n-i}\dfrac{n!}{i!}(1-X)^i = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}(C_n^i)^2X^{n-i}(1-X)^i \in \mathbb{Z}[X]$.

2. L'égalité est trivialement satisfaite pour $n = 0$ puisqu'on a $P_0 = P_0^{(0)} = 1$ et $f = f^{(0)}$. Lorsque $n \ge 1$, des intégrations par parties successives et une récurrence évidente fournissent les égalités suivantes : $\int_0^1 P_n^{(n)}(x)f(x)\mathrm{d}x = \left[P_n^{(n-1)}(x)f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 P_n^{(n-1)}(x)f^{(1)}(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 P_n^{(n-1)}(x)f^{(1)}(x)\mathrm{d}x = \dots = (-1)^k\int_0^1 P_n^{(n-k)}(x)f^{(k)}(x)\mathrm{d}x = \dots = (-1)^n\int_0^1 P_n(x)f^{(n)}(x)\mathrm{d}x$.

3. a) Le polynôme $P_n^{(n)}$ s'écrit sous la forme $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, les coefficients a_k étant entiers ; on a donc $\int_0^1 P_n^{(n)}(x)f(x)\mathrm{d}x = \displaystyle\sum_{k=n}^{0} a_k\int_0^1 x^kf(x)\mathrm{d}x$. Comme les nombres $\int_0^1 x^kf(x)\mathrm{d}x$ sont rationnels, il en est de même de $\int_0^1 P_n^{(n)}(x)f(x)\mathrm{d}x$.

b) On a $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n\int_0^1 P_n(x)f^{(n)}(x)\mathrm{d}x = 0$, ce qui, puisque A_n est entier, est en contradiction avec l'hypothèse que $A_n \neq 0$ pour une infinité de valeurs de n.

4. ① Pour $k = 0$, on a : $\int_0^\pi x^k \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$. Pour $k = 1$, on a de même : $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = [x(-\cos x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = \pi$. Pour $k \geq 2$, on a : $\int_0^\pi x^k \sin x\,\mathrm{d}x = [x^k(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi kx^{k-1}(-\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi^k + k\int_0^\pi x^{k-1}\cos x\,\mathrm{d}x$. Par ailleurs $\int_0^\pi x^{k-1}\cos x\,\mathrm{d}x = [x^{k-1}\sin x]_0^\pi - (k-1)\int_0^\pi x^{k-2}\sin x\,\mathrm{d}x = -(k-1)\int_0^\pi x^{k-2}\sin x\,\mathrm{d}x$. Il vient donc : $\int_0^\pi x^k \sin x\,\mathrm{d}x = \pi^k - k(k-1)\int_0^\pi x^{k-2}\sin x\,\mathrm{d}x$. On déduit de là, par récurrence, que $\int_0^\pi x^k \sin x\,\mathrm{d}x$ est la valeur en π d'un polynôme à coefficients entiers de degré k. Comme $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = \pi^{-k}\int_0^\pi x^k \sin x\,\mathrm{d}x$, on en déduit que, si π est rationnel, égal à $\frac{a}{b}$, alors $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x$ s'écrit comme une fraction d'entiers ayant a^k pour dénominateur. Comme $P_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n à coefficients entiers, on en déduit que $\int_0^1 P_n^{(n)}(x)f(x)\mathrm{d}x$ s'écrit sous la forme d'une fraction d'entiers ayant a^n pour dénominateur. Prenant en compte le fait que le maximum de l'application $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$ est $\frac{1}{4}$ et que $|f^{(n)}(x)| = \pi^n$, on obtient alors : $|A_n| = \left|B_n \int_0^1 P_n(x)f^{(n)}(x)\mathrm{d}x\right| = \left|a^n \int_0^1 P_n(x)f^{(n)}(x)\mathrm{d}x\right| \leq a^n \int_0^1 \left|P_n(x)f^{(n)}(x)\right|\mathrm{d}x = \frac{a^n}{n!}\int_0^1 (x(1-x))^n\left|f^{(n)}(x)\right|\mathrm{d}x \leq \frac{a^n}{n!}\frac{1}{4^n}\pi^n = \frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n$. La suite de terme général $\frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n$ tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, il en est de même de A_n. Comme $\int_0^1 P_n^{(n)}(x)f(x)\mathrm{d}x = (-1)^n\int_0^1 P_n(x)f^{(n)}(x)\mathrm{d}x$, on a en particulier $\int_0^1 P_{2m}^{(2m)}(x)f(x)\mathrm{d}x\ \int_0^1 P_{2m}(x)f^{(2m)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \pi^{2m}\,(x(1-x))^{2m}\sin x\,\mathrm{d}x > 0$ et donc $A_{2m} \neq 0$ pour tout entier m. Il en résulte que π est irrationnel.

Problème 44

1. a) On peut utiliser les formules d'Euler : $\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x = \frac{e^{(2k+1)ix}-e^{-(2k+1)ix}}{2i} - \frac{e^{(2k-1)ix}-e^{-(2k-1)ix}}{2i} = \frac{1}{2i}[e^{2kix}(e^{ix}-e^{-ix}) + e^{-2kix}(e^{ix}-e^{-ix})] = 2\,\frac{e^{2kix}+e^{-2kix}}{2}\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = 2\cos 2kx \sin x$.

b) Pour $m = 0$, on a $\sin(2m+1)x = \sin x$ et donc $F_0(x) = 1$. Supposons que la propriété soit vraie pour $m = k-1$; on a alors, pour $m = k$: $\sin(2k+1)x = \sin(2k-1)x + 2\sin x\cos 2kx = \sin x\,F_k(\sin^2 x) + 2\sin x\cos[k(2x)] = \sin x\,F_{k-1}(\sin^2 x) + 2\sin x\,T_k(\cos 2x) = \sin x\,(F_{k-1}(\sin^2 x) + 2T_k(2\sin^2 x-1))$. Les polynômes F_{k-1} et T_k étant respectivement de degré $k-1$ et k, le polynôme $F_k(X) = F_{k-1}(X) + 2T_k(2X-1)$ est de degré k, et on a : $\sin(2k+1)x = \sin x\,F_k(\sin^2 x)$.

c) Pour $k = 1, \ldots, m$ on a $0 < \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{\pi}{2}$, et donc $0 < \sin\frac{\pi}{2m+1} < \sin\frac{2\pi}{2m+1} < \ldots < \sin\frac{m\pi}{2m+1} < 1$. On a donc $F_m\left(\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{\sin\left((2m+1)\frac{k\pi}{2m+1}\right)}{\sin\frac{k\pi}{2m+1}} = \frac{\sin k\pi}{\sin\frac{k\pi}{2m+1}} = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$, les m zéros $\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}$ étant disjoints ; comme F_m est un polynôme de degré m, on a $F_m(X) = K\prod_{k=1}^m\left(X-\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}\right) = (-1)^m K\prod_{k=1}^m\left(\sin^2\frac{k\pi}{2m+1} - X\right) = (-1)^m K\prod_{k=1}^m \sin^2\frac{k\pi}{2m+1}\prod_{k=1}^m\left(1 - \frac{X}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right) = K^*\prod_{k=1}^m\left(1 - \frac{X}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right)$. On a en outre : $F_m(0) = K^*\prod_{k=1}^m 1 = K^*$; par ailleurs en faisant tendre $x \in\ ]0, \pi/2[$ vers 0 dans l'égalité $F_m(\sin^2 x) = \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}$ on obtient $F_m(0) = 2m+1$. Il vient finalement : $F_m(X) = (2m+1)\prod_{k=1}^m\left(1 - \frac{X}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right)$. On a alors : $\sin x = \sin\left((2m+1)\frac{x}{2m+1}\right) = \sin\frac{x}{2m+1}F_m(\sin^2\frac{x}{2m+1})$

$$= (2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}\prod_{k=1}^m\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2m+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right)$$

2. a) Pour $x \geq 0$ on a $e^x \geq 1$; pour $t \geq 0$ il vient donc $\int_0^t e^x dx \geq \int_0^t 1 dx$, soit $e^t-1 \geq t$ ou $e^t \geq 1+t$. De même, pour $x \leq 0$, on a $e^x \leq 1$; pour $t \leq 0$, il vient $\int_t^0 e^x dx \leq \int_t^0 1 dx$ soit $1-e^t \leq -t$ ou $e^t \geq 1+t$. Si $1+t > 0$, en divisant l'inégalité précédente par $e^t(1+t)$, on obtient $\frac{1}{1+t} \geq e^{-t}$ ou $e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}$. Si $u < 1$, on a $1 + \frac{u}{1-u} = \frac{1}{1-u} > 0$ et, en faisant $t = \frac{u}{1-u}$ dans l'inégalité précédente, il vient $e^{-u/(1-u)} \leq 1-u$.

b) On a : $e^{-\sum_{u\in U} u/(1-u)} = \prod_{u\in U} e^{-u/(1-u)} \leq \prod_{u\in U} (1-u)$. Comme $e^{-\sum_{u\in U} u/(1-u)} \geq 1 - \sum_{u\in U} \frac{u}{1-u}$, il vient : $1 - \sum_{u\in U} \frac{u}{1-u} \leq \prod_{u\in U} (1-u)$; comme $1-u \leq e^{-u}$ on a $\prod_{u\in U} (1-u) \leq \prod_{u\in U} e^{-u} = e^{-\sum_{u\in U} u} \leq 1$: d'où les inégalités demandées. Comme $\sum\limits_{u\in U} u \geq 0$, on a $1+ \sum\limits_{u\in U} u > 0$, et donc $e^{-\sum_{u\in U} u} \leq \frac{1}{1+\sum_{u\in U} u}$. L'inégalité $\prod\limits_{u\in U} (1-u) \leq \frac{1}{1+\sum_{u\in U} u}$ qui en résulte s'écrit encore $1 - \prod\limits_{u\in U} (1-u) \geq \frac{\sum_{u\in U} u}{1+\sum_{u\in U} u}$. Par ailleurs l'inégalité $1 - \sum\limits_{u\in U} \frac{u}{1-u} \leq \prod\limits_{u\in U} (1-u)$ s'écrit $1 - \prod\limits_{u\in U} (1-u) \leq \sum\limits_{u\in U} \frac{u}{1-u}$. On a finalement : $\frac{\sum_{u\in U} u}{1+\sum_{u\in U} u} \leq 1 - \prod\limits_{u\in U} (1-u) \leq \sum\limits_{u\in U} \frac{u}{1-u}$.

3. a) Pour $0 < x < \pi$ on a $0 < u_k < 1$; pour x assez proche de 0 dans $]0, \pi[$ on a $\sum_{1\leq k\leq m} u_k < 1$ et il vient donc $\frac{\sum_{1\leq k\leq m} u_k}{1+\sum_{1\leq k\leq m} u_k} \leq 1 - \prod_{1\leq k\leq m} (1-u_k) \leq \sum_{1\leq k\leq m} \frac{u_k}{1-u_k}$. Comme on a $\prod_{1\leq k\leq m} (1-u_k) = \frac{\sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}}$, l'encadrement demandé est établi.

b) Au voisinage de 0 dans $]0, \pi[$, on a $\frac{\sum_{1\leq k\leq m} u_k}{1+\sum_{1\leq k\leq m} u_k} \sim \sum_{1\leq k\leq m} u_k \sim x^2 \sum_{1\leq k\leq m} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2$ et de même $\sum_{1\leq k\leq m} \frac{u_k}{1-u_k} \sim \sum_{1\leq k\leq m} u_k \sim x^2 \sum_{1\leq k\leq m} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2$. Par ailleurs, il vient : $1 - \frac{\sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}} = \frac{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1} - \sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}} \sim \frac{(2m+1)\left(\frac{x}{2m+1} - \frac{x^3}{6(2m+1)^3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)\right)}{x} \sim \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right)x^2$. En divisant la double inégalité $\frac{\sum_{1\leq k\leq m} u_k}{1+\sum_{1\leq k\leq m} u_k} \leq 1 - \frac{\sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}} \leq \sum_{1\leq k\leq m} \frac{u_k}{1-u_k}$ par x^2 et en faisant tendre x vers 0, on obtient donc : $\sum_{1\leq k\leq m} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2 \leq \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right) \leq \sum_{1\leq k\leq m} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2$. D'où l'égalité demandée : $\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right) = \sum_{1\leq k\leq m} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2$. Il vient donc : $\frac{1}{6} - \sum_{1\leq k\leq N} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2 = \frac{1}{6(2m+1)^2} + \sum_{N+1\leq k\leq m} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2$.

c) On a $(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1} \geq (2m+1)\frac{2}{\pi}\frac{k\pi}{2m+1} = 2k$; d'où : $\sum_{N+1\leq k\leq m} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2 \leq \sum_{N+1\leq k\leq m} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{N+1\leq k\leq m} \frac{1}{k^2} \leq \frac{R_N}{4}$. Il vient ainsi : $\left|\frac{1}{6} - \sum_{1\leq k\leq N} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2\right| \leq \frac{1}{6(2m+1)^2} + \frac{R_N}{4}$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient d'abord : $\left|\frac{1}{6} - \sum_{1\leq k\leq N} \frac{1}{k^2\pi^2}\right| \leq \frac{R_N}{4}$. En faisant tendre N vers l'infini, il vient ensuite $\left|\frac{1}{6} - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2\pi^2}\right| \leq 0$, soit $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème 45

I. 1. La relation $a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$ s'écrit encore $[a]_n^{\varphi(n)} = [1]_n$. Dans le groupe multiplicatif U_n, pour tout x, on a $x^{\text{Card } U_n} = x^{\varphi(n)} = [1]_n$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ tel que PGCD$(a, n) = 1$, on a $[a]_n \in U_n$ et donc $[a]_n^{\varphi(n)} = [1]_n$.

2. Pour $n > 2$, on a $n–1 > 1$. Comme $n – (n–1) = 1$, le théorème de Bézout montre que PGCD$(n–1, n) = 1$, en sorte que $[n–1]_n \in U_n$. (On peut observer aussi que $[(n–1)^2]_n = [n^2–2n+1]_n = [1]_n$, ce qui montre que $[n–1]_n$ est son propre inverse dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.) On a donc $[n–1]_n \neq [1]_n$ et $U_n \supset \{ [1]_n, [n–1]_n \}$. Par suite $\varphi(n) = \text{Card } U_n \geq 2$.

II. 1. L'entier de chiffrement c étant premier avec $\varphi(n)$, d'après le théorème de Bézout il existe d_0, $k_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $cd_0 + k_0\varphi(n) = 1$. Les autres solutions (d, k) de l'équation $cd + k\varphi(n) = 1$ sont alors les couples $(d_0+\ell\varphi(n), k_0–\ell c)$, où $\ell \in \mathbb{Z}$. Soit ℓ^* le plus petit entier ℓ tel que $d_0+\ell\varphi(n) > 0$: on a donc $d_0+(\ell^*–1)\varphi(n) \leq 0$, ce qui entraîne $d_0+\ell^*\varphi(n) \leq \varphi(n)$. Un couple $(\varphi(n), k)$ ne peut être solution de l'équation $cd + k\varphi(n) = 1$: l'entier $c\varphi(n) + k\varphi(n)$, qui s'écrit $(c+k)\varphi(n)$, est en effet nul ou multiple non nul de $\varphi(n)$; comme $n = pq$, avec p, q premiers distincts ≥ 2, on a $n \geq 6$, et donc $\varphi(n) \geq 2$. Il vient donc $0 < d_0+\ell^*\varphi(n) < \varphi(n)$. On pose alors $\delta(I) = d = d_0+\ell^*\varphi(n)$. On a : $cd \equiv_{\varphi(n)} cd + (k_0–\ell^*c)\varphi(n) = c(d_0+\ell^*\varphi(n)) + (k_0–\ell^*c)\varphi(n) = cd_0 + k_0\varphi(n) = 1$.

2. a) Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $cd + k\varphi(n) = 1$. Comme a est à r chiffres au plus et $n = pq$ avec p et q premiers à plus de r chiffres, on a PGCD$(a, n) = 1$, en sorte que $a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$. Il vient donc : $b^d \equiv_n (a^c)^d \equiv_n a^{cd} \equiv_n a^{cd}(a^{\varphi(n)})^k \equiv_n a^{cd+k\varphi(n)} \equiv_n a$.
b) Comme $a \in [0, n[$, il suffit à D de calculer l'entier $x \in [0, n[$ tel que $b^d \equiv_n x$: on a alors $a = x$. Comme D connaît l'entier d, cette opération de déchiffrement est possible.

Problème 46

I. Soit $q \neq p$. On a : $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\,q}} = \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\,p}}\, \varepsilon_n^{\,p-q} \sim C\, \varepsilon_n^{\,p-q}$; par suite, puisque l'erreur ε_n tend vers 0, selon que $q < p$ ou $q > p$, le rapport $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\,q}}$ tend vers 0 ou vers $+\infty$ et n'admet donc pas de limite finie non nulle : q ne peut pas être un ordre de convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II. 1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers α, il en est de même de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$; comme f' et f'' sont continues, ainsi que la fonction valeur absolue, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f''(\gamma_n)}{2f'(\beta_n)}\right| = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$. On a donc d'une part $\varepsilon_{n+1} \sim \left|\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right| \varepsilon_n\varepsilon_{n-1} \sim \left|\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right| K\, \varepsilon_{n-1}^{\,p+1}$ et d'autre part $\varepsilon_{n+1} \sim K\, \varepsilon_n^{\,p} \sim K\, (K\varepsilon_{n-1}^{\,p})^p = K^{1+p}\varepsilon_{n-1}^{\,p^2}$. Par suite on a $\left|\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right| K = K^{1+p}$ et $p + 1 = p^2$ et donc $K = \left|\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{1/p}$ avec $p^2 – p – 1 = 0$. La solution positive de cette équation est $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. a) On a $y_{n+1} = \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\,\phi}} = \dfrac{c_n\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n^{\,\phi}} = c_n \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n^{\,\phi-1}} = c_n \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n^{\,1/\phi}} = c_n \left(\dfrac{\varepsilon_{n-1}^{\,\phi}}{\varepsilon_n}\right)^{1/\phi} = c_n \left(\dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}^{\,\phi}}\right)^{-1/\phi} = c_n\, y_n^{-1/\phi}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = \ln(y_{n+1}) = \ln(c_n) – \dfrac{1}{\phi}\ln(y_n) = v_n – \dfrac{1}{\phi}u_n$. Posons $k = –\dfrac{1}{\phi}$ et faisons $n = 1$: il vient $u_2 = v_1 + k\, u_1$. L'égalité $u_n = \left(-\dfrac{1}{\phi}\right)^{n-1} u_1 + S_n = k^{n-1}u_1 + S_n$ est donc vérifiée pour $n = 2$ puisque $S_2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{0} v_{n-i-1}\left(-\frac{1}{\phi}\right)^i = v_1$.
Supposons qu'on ait l'égalité $u_n = k^{n-1}u_1 + S_n$; il vient alors : $u_{n+1} = v_n + ku_n = v_n + k(k^{n-1}u_1 + S_n) = k^nu_1 + (kS_n + v_n) = k^nu_1 + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-2} v_{n-i-1}k^{i+1} + v_n = k^nu_1 + \sum_{j=1}^{n-1} v_{n-j}k^j + v_n = k^nu_1 + \sum_{j=0}^{n-1} v_{n-j}k^j = k^nu_1 + S_{n+1}$. On a donc $u_n = k^{n-1}u_1 + S_n = \left(-\dfrac{1}{\phi}\right)^{n-1} u_1 + S_n$ pour tout $n \geq 2$. Comme $\phi > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n-1} u_1 = 0$, et, par suite, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\exp(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ converge.

c) On a vu que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f''(\gamma_n)}{2f'(\beta_n)}\right| = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$; la continuité de la fonction logarithme entraîne alors que $\lim_{n\to\infty} v_n = \ln\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$. On a clairement : $S_n = v_{n-1} + kv_{n-2} + k^2v_{n-3} + \ldots + k^{n-2}v_1 = (v_{n-1} - v) + k(v_{n-2} - v) + k^2(v_{n-3} - v) + \ldots + k^{n-2}(v_1 - v) + v(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-2})$. Le terme $v(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-2})$ tend vers $v\frac{1}{1-k} = v\frac{1}{1+\frac{1}{\phi}} = v\frac{\phi}{\phi+1} = v\frac{\phi}{\phi^2} = \frac{1}{\phi}\ln\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$. Il reste à montrer que le terme $(v_{n-1} - v) + k(v_{n-2} - v) + k^2(v_{n-3} - v) + \ldots + k^{n-2}(v_1 - v)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit $\varepsilon > 0$; soit M un majorant de $\{ |v_k - v| \,/\, k \in \mathbb{N}^* \}$ et soit des entiers m et $n \geq m+3$. On a : $|(v_{n-1} - v) + k(v_{n-2} - v) + k^2(v_{n-3} - v) + \ldots + k^{n-2}(v_1 - v)| = |(v_{n-1} - v) + k(v_{n-2} - v) + \ldots + k^m(v_{n-1-m} - v) + k^{m+1}(v_{n-m-2} - v) + \ldots + k^{n-2}(v_1 - v)| \leq |v_{n-1} - v| + |k||v_{n-2} - v| + \ldots + |k|^m|v_{n-1-m} - v| + |k|^{m+1}|v_{n-m-2} - v| + \ldots + |k|^{n-2}|v_1 - v| \leq |v_{n-1} - v| + |k||v_{n-2} - v| + \ldots + |k|^m|v_{n-1-m} - v| + M(|k|^{m+1} + \ldots + |k|^{n-2})$. Comme $|k| < 1$, il existe m tel que $|k|^{m+1} + \ldots + |k|^{n-2} + \ldots = \sum_{i=m+1}^{\infty}|k|^i < \frac{\varepsilon}{2M}$; il vient ainsi : $|(v_{n-1} - v) + k(v_{n-2} - v) + k^2(v_{n-3} - v) + \ldots + k^{n-2}(v_1 - v)| < |v_{n-1} - v| + |k||v_{n-2} - v| + \ldots + |k|^m|v_{n-1-m} - v| + \frac{\varepsilon}{2}$. L'entier m étant ainsi fixé, comme $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, il existe un entier $n_0 \geq m+3$ tel que, si $n \geq n_0$, alors $|v_{n-1-m} - v| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |k| + \ldots + |k|^m)}$; on a alors, pour $n \geq n_0$,

$$|v_{n-1} - v| + |k||v_{n-2} - v| + \ldots + |k|^m|v_{n-1-m} - v| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |k| + \ldots + |k|^m)}(1 + |k| + \ldots + |k|^m) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il vient donc : $|(v_{n-1} - v) + k(v_{n-2} - v) + k^2(v_{n-3} - v) + \ldots + k^{n-2}(v_1 - v)| < \varepsilon$. Finalement, on a $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\phi}\ln\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$. D'où : $\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\phi}} = \lim_{n\to\infty} y_n = \exp(\lim_{n\to\infty} u_n) = \exp(\lim_{n\to\infty} S_n) = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{1/\phi}$.

Problème 47

1. a) Soit $a + b\sqrt{10}$, $c + d\sqrt{10} \in \Pi$; on a alors $(a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10}) \in \mathbb{R}_+^*$. En outre, il vient : $(a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10}) = (ac + 10bd) + (ad + bc)\sqrt{10}$. Par suite, $(a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10}) \in \Pi$.

b) On a en effet : $\frac{12 + 3\sqrt{10}}{2 + \sqrt{10}} = \frac{(12 + 3\sqrt{10})(\sqrt{10} - 2)}{(2 + \sqrt{10})(\sqrt{10} - 2)} = \frac{6 + 6\sqrt{10}}{6} = 1 + \sqrt{10} \in \Pi$.

c) Il vient : $\frac{m + n\sqrt{10}}{3 + \sqrt{10}} = \frac{(m + n\sqrt{10})(\sqrt{10} - 3)}{(3 + \sqrt{10})(\sqrt{10} - 3)} = \frac{(10n - 3m) + (m - 3n)\sqrt{10}}{10 - 9} = (10n - 3m) + (m - 3n)\sqrt{10}$.

2. Si x est insécable, il n'y a rien à démontrer. Supposons x sécable ; pour tous y, $z \in M\backslash U$ tels que $x = yz$ on a $f(x) = f(y)f(z) > f(y)$ puisque $f(z) > 1$, en sorte que l'ensemble d'entiers $\{ f(y) \,/\, y \in M\backslash U$ et divise $x \}$ est fini. Soit $y_1 \in M\backslash U$ un diviseur de x tel que $f(y_1)$ soit minimal. Alors y_1 est insécable, car sinon il existerait s, $t \in M\backslash U$ tels que $y_1 = st$ et l'on aurait $f(y_1) > f(s)$ avec s diviseur de x (puisque $x = yz = (st)z = s(tz)$), en contradiction avec la condition de minimalité vérifiée par y_1. Posons $x = y_1x_1$. Si x_1 est insécable, la démonstration est achevée ; sinon, il existe y_2, $x_2 \in M\backslash U$, avec y_2 insécable et $f(y_2)$ minimal, tels que $x_1 = y_2x_2$ en sorte que l'on a $x = y_1y_2x_2$ avec $1 < f(y_1) \leq f(y_2)$, et donc $1 < f(x_2) = \frac{f(x)}{f(y_1)f(y_2)} \leq \frac{f(x)}{f(y_1)^2}$. En itérant l'opération, on obtient des expressions du type $x = y_1y_2 \ldots y_kx_k$ avec $1 < f(x_k) \leq \frac{f(x)}{f(y_1)^k}$. La majoration précédente montre que l'itération s'arrête nécessairement. Si, à ce moment-là, on a $x = y_1y_2 \ldots y_{m-1}x_{m-1}$, le nombre x_{m-1} est insécable, et la démonstration est terminée.

3. On a vu que $(a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10}) = (ac + 10bd) + (ad + bc)\sqrt{10}$. Il vient donc : $\varphi((a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10})) = \varphi((ac + 10bd) + (ad + bc)\sqrt{10}) = |(ac + 10bd)^2 - 10(ad + bc)^2| = |a^2c^2 + 100b^2d^2 + 20abcd - 10(a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd)| = |a^2(c^2 - 10d^2) - 10b^2(c^2 - 10d^2)| = |(a^2 - 10b^2)(c^2 - 10d^2)| = \varphi(a + b\sqrt{10})\varphi(c + d\sqrt{10})$. Si $\varphi(a + b\sqrt{10})$

$= |a^2 - 10b^2| = 1$, on a $\dfrac{m + n\sqrt{10}}{a + b\sqrt{10}} = \dfrac{(m + n\sqrt{10})(a - b\sqrt{10})}{a^2 - 10b^2} = (m + n\sqrt{10})|a - b\sqrt{10}| \in \Pi$, en sorte que $a + b\sqrt{10}$ est une unité de Π. Inversement, si le nombre $a + b\sqrt{10}$ est une unité de Π, il divise 1, et il existe donc $c + d\sqrt{10} \in \Pi$ tel que $(a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10}) = 1$. Puisque $\varphi(1) = 1$, il vient $\varphi((a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10})) = \varphi(a + b\sqrt{10})\varphi(c + d\sqrt{10}) = 1$, et on a donc : $\varphi(a + b\sqrt{10}) = \varphi(c + d\sqrt{10}) = 1$.

4. Si l'on avait $4 \pm \sqrt{10} = (a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10})$ on aurait $\varphi(4 \pm \sqrt{10}) = 6 = \varphi(a + b\sqrt{10})\varphi(c + d\sqrt{10})$, avec $\varphi(a + b\sqrt{10})$, $\varphi(c + d\sqrt{10}) \geq 2$, et donc $a^2 - 10b^2$ serait égal à ± 2 ou ± 3, en sorte qu'on aurait $a^2 = 10b^2 \pm 2$ ou $a^2 = 10b^2 \pm 3$, a^2 s'écrivant donc sous la forme $5k \pm 2$. Or si $a = 5\ell \pm r$, où $r = 1$ ou 2, il vient $a^2 = 25\ell^2 + r^2 \pm 10\ell r$; comme $r^2 = 1$ ou 4, a^2 s'écrit bien sous la forme $5k \pm 1$, en contradiction avec ce qui précède. Les nombres $4 + \sqrt{10}$ et $4 - \sqrt{10}$ sont donc insécables dans Π. On démontre de même que 2 et 3 sont insécables. L'égalité triviale $(4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10}) = 6 = 2 \times 3$ montre alors que, dans Π, il existe deux décompositions distinctes du nombre 6 en un produit de nombres insécables.

Problème 48

1. Si r_n est pair, alors il en est de même de $5r_n$ et l'entier $5r_n+1$ est impair ; comme r_{n+1} est de la forme $(5r_n+1) - 16k$, avec $k \in \mathbb{N}$, r_{n+1} est impair. De même, si r_n est impair, alors il en est de même de $5r_n$ et l'entier $5r_n+1$ est pair ; comme r_{n+1} est de la forme $(5r_n+1) - 16k$, avec $k \in \mathbb{N}$, r_{n+1} est pair.

2. On a d'abord $\mathrm{Mod}(s_0 ; 16) = \mathrm{Mod}(1 ; 16) = 1 = r_0$. Supposons que l'on a : $r_n = \mathrm{Mod}(s_n ; 16)$. Il vient : $\mathrm{Mod}(s_{n+1} ; 16) = \mathrm{Mod}(5s_n+1 ; 16) = \mathrm{Mod}(5\mathrm{Mod}(s_n ; 16)+1 ; 16) = \mathrm{Mod}(5r_n+1 ; 16) = r_{n+1}$, CQFD.

3. Pour $n = 0$ on a $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n = 1 = s_0$. Supposons que l'on a : $s_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n$; il vient : $s_{n+1} = 5s_n+1 = 5(1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n) + 1 = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{n+1}$, CQFD.

4. On a $r_i = r_{i+j}$ si et seulement si $(1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{i+j}) - (1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^i) \equiv 0 \bmod 16$. Comme $(1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{i+j}) - (1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^i) = 5^{i+1} + \ldots + 5^{i+j} = 5^{i+1}(1 + 5 + \ldots + 5^{j-1}) = 5^{i+1}\dfrac{5^j - 1}{4}$, on a $r_i = r_{i+j}$ si et seulement si $5^j - 1$ est divisible par 4×16. On a : $5^j - 1 = (1 + 4)^j - 1 \equiv 4C_j^1 + 4^2C_j^2 \bmod 4 \times 16$. Il vient : $4C_j^1 + 4^2C_j^2 = 4(C_j^1 + 4C_j^2) = 4(j + 4j(j-1)/2) = 4j(1 + 2(j-1))$. Comme $1 + 2(j-1)$ est impair, l'entier $4C_j^1 + 4^2C_j^2$ est divisible par 4×16 si et seulement si j est divisible par 16 : on en déduit que les 16 premières valeurs $r_0, r_1, \ldots, r_{15}$ sont distinctes (et donc que $\{ r_0, r_1, \ldots, r_{15} \} = \{ 0, 1, \ldots, 15 \}$), et que, pour tout $i \in \{ 0, 1, \ldots, 15 \}$ et pour tout entier $k \geq 1$, on a : $r_{i+16k} = r_i$.

5. Les suites correspondant à $r_0 = 0, 1, 2, 3$ montrent que chacune s'obtient à partir des autres par une permutation circulaire. Ainsi obtient-on, à partir de la suite correspondant à $r_0 = 3$, la suite démarrant par $r_0 = 4$: 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5, 10 $\longrightarrow$ 4, 5, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7. On aurait eu de même : 2, 11, 8, 9, 14, 7, 4, 5, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13 $\longrightarrow$ 4, 5, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 12, 13, 2, 11, 8, 9, 14, 7. De façon générale, soit $r_0, r_1, \ldots, r_{15}$ la suite obtenue pour une certaine valeur de r_0. Si l'on part de $\rho_0 = r_j$, où $j < 15$, on aura $\rho_1 = \mathrm{Mod}(5\rho_0+1 ; 16) = \mathrm{Mod}(5r_j+1 ; 16) = r_{j+1}$, et, tant que $j+k < 15$, on aura $\rho_{k+1} = \mathrm{Mod}(5\rho_k+1 ; 16) = \mathrm{Mod}(5r_{j+k}+1 ; 16) = r_{j+k+1}$. Lorsque $j+k = 15$, c'est-à-dire pour $k = 15 - j$, on a $\rho_{k+1} = \mathrm{Mod}(5\rho_k+1 ; 16) = \mathrm{Mod}(5r_{j+k}+1 ; 16) = \mathrm{Mod}(5r_{15}+1 ; 16) = r_{16} = r_0$; on montre de même que l'on a $\rho_{k+2} = r_1, \ldots, \rho_{15} = r_{j-1}$: $r_0, r_1, \ldots, r_{j-1}, r_j, \ldots, r_{15} \longrightarrow r_j, \ldots, r_{15}, r_0, r_1, \ldots, r_{j-1}$.

Problème 49

1. a) Si $f \in \mathcal{C}$, f est la dérivée de $F \in \mathcal{D}$ définie sur I par : $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. On a donc $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}'$.

b) F est dérivable en tout point de $]0, 1]$; on a en outre : $\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0_+} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, et donc $F'(0) = 0$, de sorte que $F \in \mathcal{D}$ (et $F' \in \mathcal{D}'$). Pour $x > 0$, $F'(x) = 2x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. L'application $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 puisque pour $u_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ on a $\sin\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = 0$ et, pour $v_n = \dfrac{1}{\left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi}$ on a $\sin\left(\dfrac{1}{v_n}\right) = 1$. Par suite, F' n'est pas continue en 0, et donc $F' \notin \mathcal{C}$. On a ainsi $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}'$.

2. On a $\varphi(\mathrm{I}) = \{ 0 \} \cup \{ 1, +\infty \}$: $\varphi(\mathrm{I})$ n'est donc pas connexe. Par suite, $\varphi \notin \mathcal{D}'$.

3. a) Pour $x > 0$ on a $G'(x) = \left[2x + x^2\left(\frac{-2\mathrm{i}}{x^3}\right)\right]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{x^2}\right) = 2x\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{x^2}\right) - 2\mathrm{i}\,\frac{1}{x}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{x^2}\right) = h(x) - 2\mathrm{i}k(x)$, avec en outre $G'(0) = 0 = h(0) - 2\mathrm{i}k(0)$. Il en résulte que $k = \mathrm{i}\,\frac{G' - h}{2}$; h étant continue pour $x > 0$ et continue en 0 (puisque $|h(x)| = 2x$ tend vers 0 en x), on a $h \in \mathcal{C}$ et donc $h \in \mathcal{D}'$. Par suite, $k \in \mathcal{D}'$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{D}'$.

b) On démontre de même que $\ell \in \mathcal{D}'$. Si $\mathcal{D}'$ était une algèbre, on aurait $\varphi = k^2\ell \in \mathcal{D}'$. Or $\varphi \notin \mathcal{D}'$ d'après la question 2.

Problème 50

1. a) Si $t \in \{ s, f(s) \}$, on a $t = s$ (et $f(t) = f(s)$) ou $t = f(s)$ et $f(t) = f^2(s) = s$, et donc $\{ s, f(s) \} = \{ t, f(t) \}$. D'où le résultat.

b) Si Card $\{ s, f(s) \} = 2$ pour tout $s \in S$, alors Card $S = 2n$, où n est le nombre de paires $\{ s, f(s) \}$ distinctes et donc disjointes. Donc pour au moins un $s \in S$, Card $\{ s, f(s) \} = 1$, autrement dit $f(s) = s$.

c) D'après ce qui précède, l'involution f possède un point fixe (x, y, y), pour lequel on a : $p = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2$.

2. a) Soit σ l'unique point fixe de φ. Alors Card $S \backslash \{ \sigma \}$ est pair, et donc Card S est impair.

b) Il suffit de montrer que les égalités $x = y - z$ d'une part et $x = 2y$ d'autre part ne peuvent pas se produire dans S. Or d'une part si $x = y - z$ alors $x^2 + 4yz = (y + z)^2$, nombre non premier, et d'autre part si $x = 2y$ alors $x^2 + 4yz = 4y(y + z)$, nombre non premier.

c) Posons $\varphi(x, y, z) = (x', y', z')$. Si $(x, y, z) \in S_1$, $x'^2 + 4y'z' = (x + 2z)^2 + 4z(y - x - z) = p$; comme $x' = x + 2z = x + 2y' > 2y'$, on a $(x', y', z') \in S_3$, et $\varphi(x', y', z') = (x' - 2y', x' - y' + z', y') = (x + 2z - 2z, x + 2z - z + y - x - z, z) = (x, y, z)$. Si $(x, y, z) \in S_2$, $x'^2 + 4y'z' = (2y - x)^2 + 4y(x - y + z) = p$; comme $y' - z' = y - (x - y + z) = (2y - x) - z = x' - z < x' = 2y - z = 2y' - z < 2y'$, on a $(x', y', z') \in S_2$, et $\varphi(x', y', z') = (2y' - x', y', x' - y' + z') = (2y - (2y - x), y, 2y - x - y + x - y + z) = (x, y, z)$. Si $(x, y, z) \in S_3$, $x'^2 + 4y'z' = (x - 2y)^2 + 4(x - y + z)y = p$; comme $x' = x - 2y = (x - y + z) - y - z = y' - z' - y < y' - z'$, on a $(x', y', z') \in S_1$, et $\varphi(x', y', z') = (x' + 2z', z', y' - x' - z') = (x - 2y + 2y, y, x - y + z - x + 2y - y) = (x, y, z)$. Puisque $S_1 \cap S_3 = \emptyset$, si $\varphi(s) = s$ alors $s \in S_2$ et l'équation du point fixe s'écrit : $x = 2y - x$, $y = y$, $z = y - x + z$, $x^2 + 4yz = 4k + 1$, soit $x = y$ et $y(4z + y) = 4k + 1$; comme p est premier, $y = 1$, et donc $z = k$. Ainsi φ admet $(1, 1, k)$ pour unique point fixe et, par suite, Card S est impair : le théorème de Girard-Fermat est démontré.

Problème 51

1. a) Par une récurrence immédiate, il découle de la majoration $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ que, quelle que soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|B^k\| \le \|B\|^k$. En particulier, en prenant $B = I - A$, on obtient $\|(I - A)^k\| \le \|(I - A)\|^k$. Comme $\|I - A\| < 1$, la série numérique de terme général $\|I - A\|^k$ converge, et il en est donc de même de la série de terme général $\|(I - A)^k\|$. La série de matrices de terme général $(I - A)^k$ est donc absolument convergente, et, par suite, converge.

b) On a : $S_N - AS_N = \sum_{k=0}^{N} (I - A)^k - A\sum_{k=0}^{N} (I - A)^k = \sum_{k=0}^{N} I(I - A)^k - \sum_{k=0}^{N} A(I - A)^k = \sum_{k=0}^{N} (I - A)^{k+1} = \sum_{k=0}^{N+1} (I - A)^k - I = S_{N+1} - I$. En passant à la limite dans l'égalité obtenue, on a $S - AS = S - I$, où $S = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$. Il en résulte que $AS = I$: A est donc inversible et admet pour inverse $S = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$.

2. On a : $\|A^{-1}B - I\| = \|A^{-1}(B - A)\| \le \|A^{-1}\|\ \|B - A\| < 1$. D'après le résultat de la question 1, la matrice $A^{-1}B$ est inversible, et il en est donc de même de $B = A(A^{-1}B)$. Ainsi, quelle que soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contient la boule

ouverte de centre A et de rayon $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$: les matrices inversibles forment donc un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ (muni de la norme $\| \ \|$).

Problème 52

1. On a $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$, d'où $f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$. Comme $\{ k \in \mathbb{N} \ / \ 0 \le k \le n \} = K^+ \cup K^-$, avec $K^+ \cap K^- = \emptyset$, il vient : $f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k\in K^+} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) + \sum_{k\in K^-} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \Sigma^+ + \Sigma^-$. On a alors : $|\Sigma^-| \le \sum_{k\in K^-} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\in K^-} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}$.

2. a) La v.a. $X_1 + \ldots + X_n$ étant binomiale de paramètres n et x, on a : $P(|\bar{X} - x| \ge \delta) = \sum_{k\in K^+} P(X_1 + \ldots + X_n = k) = \sum_{k\in K^+} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$.

b) On a $P(|\bar{X} - x| \ge \delta) = P(|\bar{X} - E(\bar{X})| \ge \delta) \le \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}$. Comme $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le 2M$, il vient : $|\Sigma^+| \le 2M \sum_{k\in K^+} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{M}{2n\delta^2}$. Pour n assez grand, on a donc $|\Sigma^+| \le \frac{\varepsilon}{2}$, et il vient $|f(x) - B_n(f)(x)| \le |\Sigma^+| + |\Sigma^-| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, pour tout $x \in I$: $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur I.

Problème 53

1. a) Il vient : $[x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda]^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow x^4 + ax^3 + \left(\frac{a^2}{4} + 2\lambda\right)x^2 + \lambda a x + \lambda^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow x^4 + ax^3 + \left(\frac{a^2}{4} + 2\lambda - \alpha\right)x^2 + (\lambda a - \beta)\, x + (\lambda^2 - \gamma)$. On a ainsi $\frac{a^2}{4} + 2\lambda - \alpha = b$, $\lambda a - \beta = c$, $\lambda^2 - \gamma = d$ et donc $\alpha = \frac{a^2}{4} + 2\lambda - b$, $\beta = \lambda a - c$, $\gamma = \lambda^2 - d$.

b) Si $\beta^2 = 4\alpha\gamma$, on a : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x\right) + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$. Il vient alors : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow \left[x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda\right]^2 - \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0$. Une factorisation standard dans $\mathbb{R}[x]$ si $\alpha \ge 0$, dans $\mathbb{C}[x]$ sinon, conduit alors à résoudre dans $\mathbb{C}$ le produit de deux équations du second degré, ce que l'on sait faire.

c) On a : $\beta^2 = 4\alpha\gamma \Leftrightarrow (\lambda a - c)^2 = (a^2 + 8\lambda - 4b)(\lambda^2 - d) \Leftrightarrow a^2\lambda^2 - 2ac\lambda + c^2 = 8\lambda^3 + (a^2 - 4b)\lambda^2 - 8d\lambda + (4b - a^2)d \Leftrightarrow 8\lambda^3 - 4b\lambda^2 + 2(ac - 4d)\lambda + (4b - a^2)d - c^2 = 0$. En règle générale, trouver λ revient ainsi à résoudre une équation du 3^{e} degré.

2. On a ici $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -1$, $d = 1$. L'équation en λ est donc : $8\lambda^3 - 2\lambda^2 - 10\lambda = 0$. On peut prendre $\lambda = 0$, et il vient alors $\alpha = \frac{a^2}{4} - b = -\frac{1}{4}$, $\beta = -c = 1$, en sorte que l'on a : $x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 = \left[x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda\right]^2 - \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left[x^2 + \frac{1}{2}x\right]^2 + \frac{1}{4}(x-2)^2 = \left[x^2 + \frac{1}{2}x\right]^2 - \left(\frac{i}{2}x - i\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1-i}{2}x + i\right)\left(x^2 + \frac{1+i}{2}x - i\right) = \left(\left(x + \frac{1-i}{4}\right)^2 + \frac{i}{8} + i\right)\left(\left(x + \frac{1+i}{4}\right)^2 - \frac{i}{8} - i\right) = \left(\left(x + \frac{1-i}{4}\right)^2 + \frac{9i}{8}\right)\left(\left(x + \frac{1+i}{4}\right)^2 - \frac{9i}{8}\right)$. En observant que $(1-i)^2 = -2i$ et $(1+i)^2 = 2i$, on obtient ainsi : $x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 = \left(\left(x + \frac{1-i}{4}\right)^2 - \frac{9(-2i)}{16}\right)\left(\left(x + \frac{1+i}{4}\right)^2 - \frac{9(2i)}{16}\right) = \left(x + \frac{1-i}{4} - \frac{3(1-i)}{4}\right)$

$\left(x + \frac{1-i}{4} + \frac{3(1-i)}{4}\right)\left(x + \frac{1+i}{4} - \frac{3(1+i)}{4}\right)\left(x + \frac{1+i}{4} + \frac{3(1+i)}{4}\right) = \left(x - \frac{1-i}{2}\right)(x + (1 - i))\left(x - \frac{1+i}{2}\right)(x + (1 + i))$.

Les racines de l'équation sont donc $\frac{1-i}{2}$, $-(1 - i)$, $\frac{1+i}{2}$, $-(1 + i)$.

Remarque. Si, pour solution de l'équation $8\lambda^3 - 2\lambda^2 - 10\lambda = 0$, on avait pris $\lambda = \frac{5}{4}$, on aurait obtenu $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{10}{4} - \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ et $\beta = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$, et donc : $[x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda]^2 - \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = [x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}]^2 - \frac{9}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = (x^2 - x + \frac{1}{2})(x^2 + 2x + 2)$. Les équations du second degré à résoudre sont ici à coefficients réels, ce qui facilite le travail ; il vient : $x^2 - x + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right)$ et $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 = (x + (1 - i))(x + (1 + i))$. On retrouve les racines déjà obtenues.

Problème 54

1. On a successivement : $BX^2 = BC^2\frac{BE^2}{BD^2} = BC^2\frac{BM^2}{BD^2} = \frac{9}{4}\frac{BC^2}{BD^2} = \frac{9}{4}\frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 - AD^2} = \frac{9}{4}\frac{4 + RS^2}{4 - AS^2} = \frac{9}{4}\frac{4 + \left(\frac{1}{3}AQ\right)^2}{4 - \left(\frac{1}{2}AQ\right)^2}\frac{9}{4}$

$$\frac{4 + \frac{1}{9}AQ^2}{4 - \frac{1}{4}AQ^2} = \frac{9 + \frac{1}{4}AQ^2}{4 - \frac{1}{4}AQ^2} = \frac{9 + \frac{1}{4}(AB^2 - BQ^2)}{4 - \frac{1}{4}(AB^2 - BQ^2)} = \frac{9 + \frac{1}{4}(4 - BQ^2)}{4 - \frac{1}{4}(4 - BQ^2)} = \frac{10 - \frac{1}{4}TP^2}{3 + \frac{1}{4}TP^2} = \frac{10 - \frac{1}{4}(OP^2 - OT^2)}{3 + \frac{1}{4}(OP^2 - OT^2)} = \frac{40 - \left(1 - \frac{4}{9}\right)}{12 + \left(1 - \frac{4}{9}\right)}$$
$= \frac{360 - 5}{108 + 5} = \frac{355}{113}$.

2. On a $\frac{355}{113} = \underline{3{,}1415929}\ldots > \pi = \underline{3{,}1415926}\ldots$ La valeur obtenue est donc approchée *par excès*. Il vient : $0 < \frac{355}{113} - \pi < 3{,}14159293 - 3{,}14159265 = 0{,}00000028 = 2{,}8\cdot10^{-7}$.

Problème 55

1. Le point de coordonnées (1, 2) est sur C.

2. Supposons que $y = 0$; on a alors $x^3 = 9$. Montrons qu'un tel réel x est irrationnel. Si, en effet, on avait $x = \frac{X}{Y}$ avec X et $Y \in \mathbb{N}^*$, on aurait $X^3 = 9Y^3$ et, en notant n et m ($\in \mathbb{N}$) les exposants de 3 dans la décomposition en facteurs premiers de X et de Y, on aurait, d'après l'unicité de la décomposition, $3^{3n} = 3^{2+3m}$, et donc aussi $3n = 2 + 3m$, ce qui n'est pas possible. On montre de même que si $(0, y)$ sont les coordonnées d'un point de C, alors $y \notin \mathbb{Q}$. La même technique permet encore d'établir que l'équation $2x^3 = 9$ n'a pas de solution rationnelle, en sorte que C n'a pas de point à coordonnées rationnelles sur la première bissectrice.

3. En dérivant l'égalité $x^3 + y^3 = 9$ en x_0, on obtient : $x_0^2 + y_0^2y'_0 = 0$. L'équation de la tangente T en (x_0, y_0), soit $y'_0(x - x_0) - (y - y_0) = 0$, s'écrit encore $y_0^2y'_0(x - x_0) - y_0^2(y - y_0) = 0$ et donc aussi $x_0^2(x - x_0) + y_0^2(y - y_0) = 0$, soit enfin : $x_0^2x + y_0^2y - 9 = 0$. En écrivant que $y = \frac{1}{y_0^2}(9 - x_0^2x)$, on obtient pour équation aux abscisses des points d'intersection de T avec C : $y_0^6x^3 + (9 - x_0^2x)^3 = 9y_0^6$. Comme $y_0^6 = (y_0^3)^2 = (9 - x_0^3)^2$, cette équation s'écrit encore $(9 - x_0^3)^2x^3 + (9 - x_0^2x)^3 - 9(9 - x_0^3)^2 = 0$. En soustrayant l'égalité à zéro obtenue en faisant $x = x_0$ dans le premier membre, on obtient alors : $(9 - x_0^3)^2(x^3 - x_0^3) + (9 - x_0^2x)^3 - (9 - x_0^3)^3 = 0$. Il vient :

$$(9 - x_0^3)^2(x^3 - x_0^3) + (9 - x_0^2x)^3 - (9 - x_0^3)^3 = -9(x - x_0)^2[(x_0^3 - y_0^3)x - x_0(x_0^3 + 2y_0^3)].$$

Par suite, T recoupe C au point d'abscisse $x = \frac{x_0(x_0^3 + 2y_0^3)}{x_0^3 - y_0^3}$; l'ordonnée correspondante est :

$$y = \frac{1}{y_0^2}(9 - x_0^2x) = \frac{1}{y_0^2}\frac{x_0^6 - y_0^6}{x_0^3 - y_0^3} - \frac{x_0^3(x_0^3 + 2y_0^3)}{x_0^3 - y_0^3} = -\frac{y_0(2x_0^3 + y_0^3)}{x_0^3 - y_0^3}.$$

Les nombres x_0 et y_0 étant rationnels, il en va de même de $\dfrac{x_0(x_0^3 + 2y_0^3)}{x_0^3 - y_0^3}$ et $-\dfrac{y_0(2x_0^3 + y_0^3)}{x_0^3 - y_0^3}$. Par ailleurs, l'équation $\dfrac{x_0(x_0^3 + 2y_0^3)}{x_0^3 - y_0^3} = x_0$ équivaut (puisque $x_0 \neq 0$) à $y_0 = 0$, ce qui n'est pas possible : les points M et M' sont distincts.

4. a) On examine l'hypothèse de récurrence « X_n est pair et Y_n et Z_n sont impairs ». Elle est vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour n ; alors $X_{n+1} = X_n(X_n^3 + 2Y_n^3)$ est pair, $Y_{n+1} = -Y_n(2X_n^3 + Y_n^3)$ est impair et il en est de même de $Z_{n+1} = Z_n(X_n^3 - Y_n^3)$ (puisque Y_n, $2X_n^3 + Y_n^3$, Z_n et $X_n^3 - Y_n^3$ sont impairs). Il en résulte en particulier qu'on a toujours $X_n \neq Y_n$, en sorte que $Z_n \neq 0$: le point M_n de coordonnées $\left(\dfrac{X_n}{Z_n}, \dfrac{Y_n}{Z_n}\right)$ est donc bien défini.

b) On a bien $\left(\dfrac{X_0}{Z_0}\right)^3 + \left(\dfrac{Y_0}{Z_0}\right)^3 = 2^3 + 1^3 = 9$. Supposons que l'on ait : $\left(\dfrac{X_n}{Z_n}\right)^3 + \left(\dfrac{Y_n}{Z_n}\right)^3 = 9$. Il vient alors : $\left(\dfrac{X_{n+1}}{Z_{n+1}}\right)^3 + \left(\dfrac{Y_{n+1}}{Z_{n+1}}\right)^3 = \left(\dfrac{X_n(X_n^3 + 2Y_n^3)}{X_n^3 - Y_n^3}\right)^3 - \left(\dfrac{Y_n(2X_n^3 + Y_n^3)}{X_n^3 - Y_n^3}\right)^3 = \dfrac{(X_n(X_n^3 + 2Y_n^3))^3 - (Y_n(2X_n^3 + Y_n^3))^3}{(X_n^3 - Y_n^3)^3} = \dfrac{(X_n^3 + Y_n^3)(X_n^3 - Y_n^3)^3}{(X_n^3 - Y_n^3)^3} = 9$. Les points M_n sont donc sur C. On a $X_1 = X_0(X_0^3 + 2Y_0^3) = 2(8 + 2) = 20$, $Y_1 = -Y_0(2X_0^3 + Y_0^3) = -(16 + 1) = -17$, $Z_1 = Z_0(X_0^3 - Y_0^3) = 8 - 1 = 7$ et donc $x_1 = \dfrac{20}{7}$, $y_1 = -\dfrac{17}{7}$. Il vient alors $X_2 = X_1(X_1^3 + 2Y_1^3) = 20(8000 - 9826) = -36520$, $Y_2 = -Y_1(2X_1^3 + Y_1^3) = 17(16000 - 4913) = 188479$, $Z_2 = Z_1(X_1^3 - Y_1^3) = 7(8000 + 4913) = 90391$, et donc $x_2 = -\dfrac{36520}{90391}$, $y_1 = \dfrac{188479}{90391}$.

c) L'exposant α étant non nul, on a dans $\mathbb{Z}$ l'égalité $X_{n+1} = 2^{\alpha+1}(X_n \cdot 2^{-\alpha})((X_n \cdot 2^{-1})^3 + Y_n^3)$. L'entier Y_n étant impair, cette égalité montre que l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de X_{n+1} est $\alpha + 1$. L'égalité $\dfrac{X_n}{Z_n} = \dfrac{X_{n+p}}{Z_{n+p}}$ entraîne que $Z_{n+p}X_n = Z_nX_{n+p}$; or cette dernière est impossible puisque les exposants de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de $Z_{n+p}X_n$ de Z_nX_{n+p}, égaux respectivement à ceux relatifs à X_n et X_{n+p}, sont distincts. Par suite, les points M_n et M_{n+p} sont distincts, quels que soient $n, p \in \mathbb{N}$.

Problème 56

1. Le coefficient de X^k ($2 \leq k \leq 12$) dans le développement du produit de polynômes

$$(p_1X + p_2X^2 + p_3X^3 + p_4X^4 + p_5X^5 + p_6X^6)(q_1X + q_2X^2 + q_3X^3 + q_4X^4 + q_5X^5 + q_6X^6)$$

s'écrit $\displaystyle\sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i, j \leq 6}} p_iq_j$: il n'est donc pas autre chose que r_k.

2. On a ici : $(PQ)(X) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 (X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6)^2 = \dfrac{X^2}{36}(1 + X + \ldots + X^5)^2 = \displaystyle\sum_{k=2}^{12} r_kX^k$. Il vient : $r_2 = \dfrac{1}{36}$, $r_3 = \dfrac{1}{18}$, $r_4 = \dfrac{1}{12}$, $r_5 = \dfrac{1}{9}$, $r_6 = \dfrac{5}{36}$, $r_7 = \dfrac{1}{6}$, $r_8 = \dfrac{5}{36}$, $r_9 = \dfrac{1}{9}$, $r_{10} = \dfrac{1}{12}$, $r_{11} = \dfrac{1}{18}$, $r_{12} = \dfrac{1}{36}$.

3. a) Puisque $\displaystyle\sum_{k=2}^{12} r_k = 1$, on a $r_2 = \ldots = r_{12} = \dfrac{1}{11}$ et donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{12} r_kX^k = \dfrac{X^2}{11}(1 + \ldots + X^{10})$. Comme par ailleurs on a $(PQ)(X) = X^2(p_1 + \ldots + p_6X^5)(q_1 + \ldots + q_6X^5)$, il vient : $(p_1 + \ldots + p_6X^5)(q_1 + \ldots + q_6X^5) = \dfrac{1}{11}(1 + \ldots + X^{10})$.

b) Les polynômes $p_1 + \ldots + p_6X^5$ et $q_1 + \ldots + q_6X^5$ étant de degré impair s'annulent l'un et l'autre dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, comme $1 + \ldots + X^{10} = \dfrac{1 - X^{11}}{1 - X}$, les racines complexes du polynôme $1 + \ldots + X^{10}$ sont les racines onzièmes autre que 1 de l'unité : aucune n'est réelle. On ne peut donc pas avoir l'égalité $P(X)Q(X) = \dfrac{1}{11}\displaystyle\sum_{j=2}^{12} X^j$: les dés ne peuvent pas être truqués comme souhaité !

Problème 57

I. Une algèbre réelle de dimension 3. 1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a + b\cos + c\sin = 0$. On a, pour $x = 0$, $a + b = 0$; pour $x = \frac{\pi}{2}$, $a + c = 0$, en sorte que $b = c = -a$; pour $x = \frac{\pi}{4}$, $a + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} = 0$, ce qui entraîne $\sqrt{2}b = \sqrt{2}c = -a$, et donc finalement $a = b = c = 0$, CQFD. T_3 est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ engendré par 1, cos, sin ; par suite, $\dim T_3 = 3$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$2\pi\, \varphi*\psi(x) = \int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (a + b\cos t + c\sin t)(d + e\cos(x-t) + f\sin(x-t))\mathrm{d}t = ad\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t + be\int_0^{2\pi} \cos t\cos(x-t)\mathrm{d}t + bf\int_0^{2\pi} \cos t\sin(x-t)\mathrm{d}t + ce\int_0^{2\pi} \sin t\cos(x-t)\mathrm{d}t + cf\int_0^{2\pi} \sin t\sin(x-t)\mathrm{d}t = 2\pi ad + \pi be\cos x + \pi bf\sin x + \pi ce\sin x - \pi cf\cos x = 2\pi ad + \pi(be-cf)\cos x + \pi(bf+ce)\sin x$. On a ainsi $\varphi*\psi = ad + \frac{be-cf}{2}\cos + \frac{bf+ce}{2}\sin \in T_3$.

3. Soit $(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) \in \mathbb{R}^3$. Il vient d'une part : $[(a + b\cos + c\sin)*(d + e\cos + f\sin)]*(g + h\cos + i\sin) = (ad + \frac{be-cf}{2}\cos + \frac{bf+ce}{2}\sin)*(g + h\cos + i\sin) = adg + \frac{\frac{be-cf}{2}h - \frac{bf+ce}{2}i}{2}\cos + \frac{\frac{be-cf}{2}i + \frac{bf+ce}{2}h}{2}\sin$. D'autre part on a : $(a + b\cos + c\sin)*[(d + e\cos + f\sin)*(g + h\cos + i\sin)] = (a + b\cos + c\sin)*(dg + \frac{eh-fi}{2}\cos + \frac{ei+fh}{2}\sin) = adg + \frac{b\frac{eh-fi}{2} - c\frac{ei+fh}{2}}{2}\cos + \frac{b\frac{ei+fh}{2} + c\frac{eh-fi}{2}}{2}\sin$. On voit que l'on a $\frac{b\frac{eh-fi}{2} - c\frac{ei+fh}{2}}{2} = \frac{\frac{be-cf}{2}h - \frac{bf+ce}{2}i}{2}$ et $\frac{\frac{be-cf}{2}i + \frac{bf+ce}{2}h}{2} = \frac{\frac{be-cf}{2}i + \frac{bf+ce}{2}h}{2}$. L'égalité attendue en résulte : la multiplication interne est donc associative. La commutativité est évidente sur l'expression de $\varphi*\psi$ dans la base { 1, cos, sin }. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a : $(a + b\cos + c\sin)*(1 + 2\cos) = a + b\cos + c\sin$. L'application $1 + 2\cos$ est donc l'élément unité de T_3. Soit $\varphi = a + b\cos + c\sin$, $\psi = d + e\cos + f\sin$, $\xi = g + h\cos + i\sin$; il vient : $\varphi*(\psi + \xi) = (a + b\cos + c\sin)*[(d + e\cos + f\sin) + (g + h\cos + i\sin)] = (a + b\cos + c\sin)*[(d + g) + (e + h)\cos + (f + i)\sin] = a(d + g) + \frac{b(e + h) - c(f + i)}{2}\cos + \frac{b(f + i) + c(e + h)}{2}\sin = (ad + ag) + \left(\frac{be - cf}{2} + \frac{bh - ci}{2}\right)\cos + \left(\frac{bf + ce}{2} + \frac{bi + ch}{2}\right)\sin = (ad + \frac{be-cf}{2}\cos + \frac{bf+ce}{2}\sin) + (ag + \frac{bh - ci}{2}\cos + \frac{bi + ch}{2}\sin) = (a + b\cos + c\sin)*(d + e\cos + f\sin) + (a + b\cos + c\sin)*(g + h\cos + i\sin) = \varphi*\psi + \varphi*\xi$. Il vient ensuite : $(a + b\cos + c\sin)*[\lambda(d + e\cos + f\sin)] = (a + b\cos + c\sin)*(\lambda d + \lambda e\cos + \lambda f\sin) = a(\lambda d) + \frac{b(\lambda e) - c(\lambda f)}{2}\cos + \frac{b(\lambda f) + c(\lambda e)}{2}\sin = (\lambda a)d + \frac{(\lambda b)e - (\lambda c)f}{2}\cos + \frac{(\lambda b)f + (\lambda c)e}{2}\sin = (\lambda a + \lambda b\cos + \lambda c\sin)*(g + h\cos + i\sin) = [\lambda(a + b\cos + c\sin)]*(d + e\cos + f\sin) = \lambda(ad + \frac{be - cf}{2}\cos + \frac{bf + ce}{2}\sin = \lambda[(a + b\cos + c\sin)*(d + e\cos + f\sin)]$. La propriété de compatibilité des multiplications interne et externe est bien vérifiée. Enfin on a : $1*\cos = (1 + 0\cos + 0\sin)*(0 + 1\cos + 0\sin) = 0 + \frac{0-0}{2}\cos + \frac{0+0}{2}\sin = 0$. Les applications 1 et cos sont donc des diviseurs de 0 dans T_3.

II. Algèbres réelles de dimension impaire. 1. Soit $x \in T$; pour tous $y, z \in \mathbb{R}^n$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a : $\tau(x)(\lambda y + \mu z) = x(\lambda y + \mu z) = x(\lambda y) + x(\mu z) = \lambda(xy) + \mu(xz) = \lambda\tau(x)(y) + \mu\tau(x)(z)$; par suite, $\tau(x) \in L(\mathbb{R}^n)$. Montrons maintenant que τ est une application linéaire de T dans $L(\mathbb{R}^n)$. Soit $x, x' \in T$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$; pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a : $\tau(\lambda x + \lambda' x')(y) = (\lambda x + \lambda' x')y = (\lambda x)y + (\lambda' x')y = \lambda(xy) + \lambda'(x'y) = \lambda\tau(x)(y) + \lambda'\tau(x')(y)$, CQFD. En outre, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a : $\tau(\varepsilon u)(y) = (\varepsilon u)y = \varepsilon(uy) = \varepsilon y = \varepsilon \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(y)$, et on a donc $\tau(\varepsilon u) = \varepsilon \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

2. L'endomorphisme $\tau(x)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\tau(x)$ est injectif. Or l'algèbre T ne possédant pas de diviseurs de zéro à gauche, si $x \neq 0$, et si on a $\tau(x)(y) = 0$, soit $xy = 0$, il vient $y = 0$, CQFD. Par suite, on a $\det \tau(x) \neq 0$.

3. On a $\det(\varepsilon \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \varepsilon^n$. La dimension n étant impaire, on a $\varepsilon^n = \varepsilon$. D'où $\det(\varepsilon \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \varepsilon$.

4. D'après le résultat de la question II.2 et l'hypothèse que $\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, on a, pour tout $t \in [-1, 1]$, $\det(\tau(\gamma(t)) \neq 0$, soit $\omega(t) \neq 0$.

5. On a $\omega = \det \circ \tau \circ \gamma$. Par définition, γ est une application continue de $[-1, 1]$ dans T. En outre, τ est une application linéaire de T dans $\mathbb{R}^n$, espaces de dimension finie n : elle est donc continue. L'application det étant elle aussi continue, il en résulte que ω est une application continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Or on a : $\omega(\varepsilon) = \det(\tau(\gamma(\varepsilon)) = \det(\tau(\varepsilon u)) = \det(\varepsilon \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \varepsilon$, soit $\omega(-1) = -1$ et $\omega(1) = 1$. L'application ω étant continue, il existe donc $t_0 \in]-1, 1[$ tel que $\omega(t_0) = 0$, en contradiction avec le résultat obtenu à la question précédente. On en déduit que si une algèbre unitaire T n'a pas de diviseurs de zéro à gauche, et si $n > 1$, alors n est pair. En particulier, on ne peut espérer munir $\mathbb{R}^3$ d'une structure de corps (même non commutatif) compatible avec sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Problème 58

I. Un résultat classique d'intégration approchée. 1. On a ici $f'' = 2$ et $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} = 0{,}333...$ Comme $x_i = \frac{i}{5}$, on a $f\left(\frac{i}{5}\right) = \frac{i^2}{25} = \frac{4i^2}{100}$ et il vient : $T_5(f) = \frac{1}{10}[(f(0) + f(1)) + 2(f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)] = \frac{1}{10}[1 + 2(0{,}04 + 0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64)] = 0{,}34$. On a donc : $\left| T_5(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| = 0{,}34 - \frac{1}{3} = \frac{1}{150}$.

2. On a $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, pour tout $x \in [0, 1]$ et, pour $x \in]0, 1]$, $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}$. En revanche, f' n'est pas dérivable en 0 (et la dérivée f'', définie sur $]0, 1]$, n'est pas bornée sur cet intervalle). On a : $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = 0{,}4$. Il vient par ailleurs : $T_5(f) = \frac{1}{10}[1 + 2(f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8))] = 0{,}4045449\ldots$ La valeur décimale approchée à 10^{-3} près par excès de $T_5(f)$ est donc 0,405, et celle de $\left| T_5(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right|$ est donc $5 \cdot 10^{-3}$.

II. Démonstration de (♣). 1. Posons $u = t - m_i$ et $v' = f'(t)$; on a $u' = 1$ et $v = f(t)$. Comme $(uv)' = uv' + u'v$, en intégrant entre x_{i-1} et x_i il vient $(x_i - m_i)f(x_i) - (x_{i-1} - m_i)f(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - m_i)f'(t)\mathrm{d}t + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\mathrm{d}t$. Comme $x_i - m_i = -(x_{i-1} - m_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} = \frac{b-a}{2n}$, on a $L_i = \frac{b-a}{2n}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - m_i)f'(t)\mathrm{d}t$.

2. Posons $u' = t - m_i$ et $v = f'(t)$; on a $u = \frac{1}{2}(t - m_i)^2$, $v' = f''(t)$. En intégrant l'égalité $(uv)' = u'v + uv'$ entre x_{i-1} et x_i il vient $\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2(f'(x_i) - f'(x_{i-1})) = L_i + \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - m_i)^2 f''(t)\mathrm{d}t$, et donc :

$$L_i = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - m_i)^2 f''(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - (t - m_i)^2\right) f''(t)\mathrm{d}t.$$

On a par ailleurs : $\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{2n}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\mathrm{d}t\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{2n}(f(x_{i-1}) + f(x_i))\right) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2n}[(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) + ((f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n))] - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Il vient donc : $\left| T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{i=1}^n L_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |L_i| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - (t - m_i)^2 \right| |f''(t)|\,|\mathrm{d}t| \leq \frac{M}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - (t-m_i)^2\right)\mathrm{d}t$. On a : $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - (t-m_i)^2\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 \frac{b-a}{n} - \left[\frac{(t-m_i)^3}{3}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$. Il vient ainsi : $\left| T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{M}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M$, CQFD.

III. Améliorations de (♣). 1. On a : $|L_i| \leq N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |t-m_i|\mathrm{d}t = 2N\int_{m_i}^{x_i} (t-m_i)\mathrm{d}t = N\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 = \frac{N}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$. Par suite, on a : $\left| T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} L_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |L_i| \leq \frac{N}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 n = \frac{(b-a)^2}{4n} N$. Lorsque $f(x) = x^{3/2}$ pour $x \in [0, 1]$, on a $|f'(x)| = \frac{3}{2}\sqrt{x} \leq \frac{3}{2}$; il vient donc $\left| T_n(f) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{3}{8n}$. Pour $n = 5$, l'erreur est majorée par 0,075.

2. D'après le résultat de la section II, question 1, on a $L_i = \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - (t-m_i)^2\right) f''(t)\mathrm{d}t$ pour $1 < i \leq n$. Pour $i = 1$, soit $\varepsilon \in\ ]a, x_1[$. Posons $u' = t - m_1$ et $v = f'(t)$; on a $u = \frac{1}{2}(t-m_1)^2$, $v' = f''(t)$; en intégrant l'égalité $(uv)' = u'v + uv'$ entre ε et x_1 il vient : $\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2(f'(x_1) - f'(\varepsilon)) = L_1(\varepsilon) + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{x_1} (t-m_1)^2 f''(t)\mathrm{d}t$, où $L_1(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{x_1} (t-m_1)f'(t)\mathrm{d}t$. On a :

$$L_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2\int_{\varepsilon}^{x_1} f''(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{x_1} (t-m_1)^2 f''(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{x_1} \left(\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - (t-m_1)^2\right) f''(t)\mathrm{d}t.$$

Comme l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{x_1} f''(t)\mathrm{d}t$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{x_1} \left(\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - (t-m_1)^2\right) f''(t)\mathrm{d}t$ (puisque $\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - (t-m_1)^2$ est borné sur $[0, x_1]$). Par suite, lorsque ε tend vers 0 dans $]0, x_1[$, $L_1(\varepsilon)$ a pour limite $L_1 = \frac{1}{2}\int_0^{x_1} \left(\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - (t-m_1)^2\right) f''(t)\mathrm{d}t$. Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, il vient $|L_i| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f''(t)|\mathrm{d}t$ et donc $\left| T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} L_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |L_i| \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2}\int_a^b |f''(t)|\mathrm{d}t$. Lorsque $f(x) = x^{3/2}$ pour $x \in [0, 1]$, on a $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$; il vient donc $\int_0^1 |f''(t)|\mathrm{d}t = \frac{3}{2}$ et, par suite, $\left| T_n(f) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{3}{16n^2}$. Pour $n = 5$, l'erreur est majorée par $\frac{3}{400} = 7{,}5\cdot 10^{-3}$.

Problème 59

1. Il est clair d'abord que l'application est à valeurs dans $\mathbb{Q}^2$. On a ensuite :

$$\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 = \frac{4t^2}{(t^2+1)^2} + \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(t^2+1)^2}{(t^2+1)^2} = 1.$$

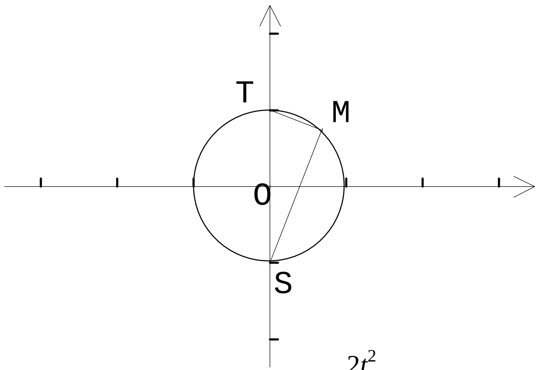
Comme $\frac{2t}{t^2+1}$ ne s'annule que pour $t = 0$, ce qui donne $\frac{t^2-1}{t^2+1} = -1$, le point de coordonnées $(0, 1)$ n'est pas atteint par l'application étudiée. Par suite, cette application prend bien ses valeurs dans l'ensemble indiqué. Montrons maintenant qu'elle est surjective. En observant que $y = \frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{t^2+1-2}{t^2+1} = 1 - \frac{x}{t}$, on est conduit, pour $(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \backslash \{ (0, 1) \}$, à poser $t = \frac{x}{1-y}$: t est bien rationnel et l'on a

$$\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2\dfrac{x}{1-y}}{\left(\dfrac{x}{1-y}\right)^2+1} = \frac{2x(1-y)}{x^2+(1-y)^2} = \frac{2x(1-y)}{1-y^2+(1-y)^2} = \frac{2x}{1+y+1-y} = x\ ;$$
$$\frac{t^2-1}{t^2+1} = 1-\frac{x}{t} = 1-\frac{x}{\dfrac{x}{1-y}} = 1-(1-y) = y.$$

Remarque 1. Il est plus rapide de procéder ainsi. La droite passant par le point S (0, –1) et le point M(x, y) de $C\backslash\{S\}$ a pour pente $\tau = \dfrac{y+1}{x}$; les coordonnées de M exprimées en fonction de τ sont alors les solutions du système

$$\begin{cases} \tau x + y + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

On a : $x^2 + y^2 = x^2 + (1 - \tau x)^2 = (1 + \tau^2)x^2 - 2\tau x + 1$. Le système a donc pour (unique) solution $x = \dfrac{2\tau}{\tau^2+1}$ et $y = \tau x - 1 = \dfrac{2\tau^2}{\tau^2+1} - 1 = \dfrac{\tau^2-1}{\tau^2+1}$.



Ce paramétrage peut aussi être obtenu en observant que $tx = \dfrac{2t^2}{t^2+1}$ et donc que $tx - 1 = \dfrac{2t^2}{t^2+1} - \dfrac{t^2+1}{t^2+1} = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} = y$. Inversement, si l'on désigne toujours par τ la pente de la droite (SM), le paramétrage du corrigé ci-dessus s'obtient en coupant le cercle C par la droite (TM) perpendiculaire à (SM), dont la pente vaut donc $-\dfrac{1}{\tau}$ et qui a ainsi pour équation $y - 1 = -\dfrac{1}{\tau}x$: on a donc bien $\tau = \dfrac{x}{1-y}$.

Remarque 2. L'injectivité de l'application étudiée est évidente d'après l'interprétation géométrique. On peut voir aussi que, si $u^2 < t^2$, alors $\dfrac{t^2-1}{t^2+1} = 1 - \dfrac{2}{t^2+1} > 1 - \dfrac{2}{u^2+1} = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$. Ou encore que, si $u \neq t$ et $\dfrac{t^2-1}{t^2+1} = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ alors $\dfrac{t^2-1}{t^2+1} = \dfrac{u^2-1}{u^2+1} = \dfrac{(t^2-1)-(u^2-1)}{(t^2+1)-(u^2+1)} = \dfrac{t^2-u^2}{t^2-u^2} = 1$, ce qui n'est pas possible dans $\mathbb{R}$ (et donc dans $\mathbb{Q}$).

2. a) Montrons d'abord que l'hypothèse faite sur p, q, r entraîne la non-constance des quotients p/r et q/r. Si, en effet, p/r était constant, on aurait $p = kr$ où $k \in \mathbb{Q}$, et donc $q^n = r^n - p^n = r^n(1 - k^n)$, soit $(q/r)^n = 1 - k^n$; on aurait ainsi $q = \ell r$ où $\ell \in \mathbb{Q}$, et donc, puisque p, q, r sont premiers entre eux dans leur ensemble, $r \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'hypothèse que p, q, r ne sont pas tous constants. Cela fait, si l'on avait $r'q - rq' = 0$, on aurait $(q/r)' = 0$ et donc q/r constant : puisque $(p/r)^n + (q/r)^n = 1$, il en irait de même de p/r, contrairement à l'hypothèse de non-constance. Même conclusion si l'on avait $p'r - pr' = 0$. Si l'on avait $p'q - pq' = 0$, on aurait $(p/q)' = 0$ et il existerait donc $k \in \mathbb{Q}$ tel que $q = kp$, en sorte qu'on aurait $(p/r)^n + (q/r)^n = (p/r)^n(1 + k^n) = 1$, ce qui contredit l'hypothèse de non-constance.

b) Il est clair que $p(q'r - qr') + q(r'p - rp') + r(p'q - pq') = 0$ et que, de même, $p'(q'r - qr') + q'(r'p - rp') + r'(p'q - pq') = 0$. L'ensemble Σ des solutions du système considéré est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}(t)^3$ de dimension au moins égale à 1 sur $\mathbb{Q}(t)$. L'espace image de l'application linéaire de $\mathbb{Q}(t)^3$ dans $\mathbb{Q}(t)^2$ définie par $(x, y, z) \mapsto (px + qy - rz, p'x + q'y - r'z)$ contient (p, p') et (q, q'), qui sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}(t)$ (ou

$\mathbb{Q}[t]$), puisque l'existence d'une solution non nulle $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}[t]$ du système $\begin{cases} \lambda p + \mu q = 0 \\ \lambda p' + \mu q' = 0 \end{cases}$ impliquerait que $\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}$ $= pq' - p'q$ soit nul, ce qui n'est pas le cas. Par suite, l'ensemble Σ des solutions est la droite vectorielle de $\mathbb{Q}(t)^3$ contenant l'élément non nul $(q'r - qr', r'p - rp', -p'q + pq')$: $\Sigma = \{ \lambda(q'r - qr', r'p - rp', -p'q + pq') \ / \ \lambda \in \mathbb{Q}(t) \} = \{ \frac{f}{g}(q'r - qr', r'p - rp', -p'q + pq') \ / \ f, g \in \mathbb{Q}[t], g \neq 0$ et $f = 0$ ou ($f \neq 0$ et f et g premiers entre eux) $\}$.

c) L'égalité $p^n + q^n - r^n = 0$ s'écrit encore $p(p^{n-1}) + q(q^{n-1}) - r(r^{n-1}) = 0$. Par ailleurs, en dérivant cette même égalité, il vient (après division par n) : $p'(p^{n-1}) + q'(q^{n-1}) - r'(r^{n-1}) = 0$. On a donc $(p^{n-1}, q^{n-1}, r^{n-1}) \in \Sigma$. Par suite, il existe $f, g \in \mathbb{Q}[t]$, non nuls et premiers entre eux, tels que $p^{n-1} = \frac{f}{g}(q'r - qr')$, $q^{n-1} = \frac{f}{g}(r'p - rp')$, $r^{n-1} = -\frac{f}{g}(p'q - pq')$. Comme p, q, r sont premiers entre eux dans leur ensemble, on peut supposer que $f = 1$.

d) Le degré de $q'r - qr'$ est au plus égal à $\ell - 1 + m = \ell + m - 1$; le degré de gp^{n-1} est au moins égal à $(n-1)k$. L'égalité $gp^{n-1} = q'r - qr'$ implique donc qu'on ait $(n-1)k \leq \ell + m - 1$. Or, sous l'hypothèse que $k \geq \ell \geq m$, lorsque $n - 1 \geq 2$ on a $(n-1)k \geq 2k \geq \ell + m > \ell + m - 1$: la majoration précédente est donc impossible. L'argument utilisé vaut encore lorsque k, ℓ, m sont ordonnés autrement. Par suite, l'hypothèse faite au début de la question 2 est fausse et le résultat annoncé est donc démontré.

Problème 60

I. a) Si α est réel, on a : $e^z = \alpha \Leftrightarrow e^x\cos y + ie^x\sin y = \alpha \Leftrightarrow e^x\cos y = \alpha \wedge e^x\sin y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) $\wedge\ e^x = (-1)^k\alpha$. Il en résulte que, si $\alpha = 0$, alors $\mathrm{Log}\ \alpha = \varnothing$; si $\alpha < 0$, alors $\mathrm{Log}\ \alpha = \{ \ln|\alpha| + k\pi i \ / \ k \in \mathbb{Z}$ impair $\}$; si $\alpha > 0$, alors $\mathrm{Log}\ \alpha = \{ \ln\alpha + k\pi i \ / \ k \in \mathbb{Z}$ pair $\}$.

b) On a : $e^z = \alpha \Leftrightarrow e^xe^{iy} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow e^x = \rho \wedge e^{iy} = e^{i\theta} \Leftrightarrow x = \ln\rho \wedge y = \theta + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$). Il vient donc : $\mathrm{Log}\ \alpha = \{ \ln\rho + i(\theta + 2k\pi) \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$.

c) Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; on a $\mathrm{Log}\ \alpha = \{ \ln\alpha + 2k\pi i \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$ et donc $[\alpha]^{[\beta]} = \{ e^{\beta z} \ / \ z \in \mathrm{Log}\ \alpha \} = \{ e^{\beta(\ln\alpha + 2k\pi i)} \ / \ k \in \mathbb{Z} \} = \{ e^{\beta\ln\alpha}e^{2\beta k\pi i} \ / \ k \in \mathbb{Z} \} = \{ \alpha^\beta e^{2k\beta\pi i} \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$. On a par ailleurs : $\mathrm{Log}\ i = \{ \ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi) \ / \ k \in \mathbb{Z} \} = \{ i(\pi/2 + 2k\pi) \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$. Il vient donc : $[i]^{[1]} = \{ e^z / \ z \in \mathrm{Log}\ i \} = \{ e^{i(\pi/2 + 2k\pi)} \ / \ k \in \mathbb{Z} \} = \{ e^{i\pi/2}e^{2ik\pi} \ / \ k \in \mathbb{Z} \} = \{ i \}$.

II. a) On a $\alpha - a = ib$ et $(\alpha - a)^2 = -b^2$, soit donc $\alpha^2 - 2a\alpha + (a^2 + b^2) = 0$, CQFD.

b) Les nombres 2 et i sont algébriques : le premier vérifie $x - 2 = 0$, le second $x^2 + 1 = 0$. Comme i n'est pas réel, le théorème de Gelfond-Schneider permet de conclure que 2^i est transcendant. De même, le réel $\sqrt{2}$ est algébrique (puisqu'il vérifie $x^2 - 2 = 0$), mais n'est pas rationnel (si l'on avait $\sqrt{2} = p/q$, avec p et q entiers positifs premiers entre eux, on aurait $p^2 - 2q^2 = 0$: p diviserait 2 et q diviserait 1, de sorte qu'on aurait $p = 1$ ou 2 et $q = 1$, ce qui est incompatible avec l'égalité $p/q = \sqrt{2}$) ; par suite, d'après le théorème de Gelfond-Schneider, $2^{\sqrt{2}}$ est transcendant.

c) On a $[i]^{[-2i]} = \{ e^{-2iz} / \ z \in \mathrm{Log}\ i \}$. Comme $\mathrm{Log}\ i = \{ \ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi) \ / \ k \in \mathbb{Z} \} = \{ i(\pi/2 + 2k\pi) \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$, on peut prendre $z = i\frac{\pi}{2}$. Il vient alors $e^{-2iz} = e^{-2i(i(\pi/2)} = e^\pi$, et on a donc $e^\pi \in [i]^{[-2i]}$. Comme i et $-2i$ sont algébriques (le second vérifiant $x^2 + 4 = 0$) et que $-2i$ n'est pas réel, d'après le théorème de Gelfond-Schneider, e^π est transcendant.

d) On a : $[i]^{[-2i\sqrt{163}]} = \{ e^{-2i\sqrt{163}z} / \ z \in \mathrm{Log}\ i \}$. Comme précédemment, on prend $z = i\frac{\pi}{2}$, ce qui donne : $e^{-2i\sqrt{163}(i(\pi/2)} = e^{\pi\sqrt{163}}$, et on a donc $e^{\pi\sqrt{163}} \in [i]^{[-2i\sqrt{163}]}$. Comme i et $-2i\sqrt{163}$ sont algébriques (le second vérifiant $x^2 + 652 = 0$) et que $-2i\sqrt{163}$ n'est pas réel, d'après le théorème de Gelfond-Schneider, $e^{\pi\sqrt{163}}$ est transcendant : ce n'est donc pas un entier.

e) On a $\gamma = e^{\ln\gamma} = e^{\beta\ln\alpha} = (e^{\ln\alpha})^\beta = \alpha^\beta$. D'après le théorème de Gelfond-Schneider, si β est algébrique et non rationnel, alors $\gamma = \alpha^\beta$ est transcendant, contrairement à l'hypothèse faite sur γ. Par suite, β est soit transcendant, soit rationnel. Il en est en particulier ainsi de $\log_{10} r = \frac{\ln r}{\ln 10}$ lorsque $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Lorsque $\frac{\ln r}{\ln 10}$ est rationnel, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln r}{\ln 10} = \pm\frac{p}{q}$, égalité qui s'écrit encore $r^{\pm q} = 10^p$. Il découle de cette égalité qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $r = 10^n$; inversement, si $r = 10^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, alors $\log_{10} r = \dfrac{\ln r}{\ln 10} = n$. En d'autres termes, lorsque $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $\log_{10} r$ est un entier relatif si r est une puissance de 10, et un nombre transcendant sinon.

Problème 61

I. On a : $\cos(\alpha x + \alpha y) + \cos(\alpha x - \alpha y) = \dfrac{e^{i\alpha x + i\alpha y} + e^{-i\alpha x - i\alpha y}}{2} + \dfrac{e^{i\alpha x - i\alpha y} + e^{-i\alpha x + i\alpha y}}{2} = e^{i\alpha x}\dfrac{e^{i\alpha y} + e^{-i\alpha y}}{2} + e^{-i\alpha x}\dfrac{e^{i\alpha y} + e^{-i\alpha y}}{2} = 2\,\dfrac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}\,\dfrac{e^{i\alpha y} + e^{-i\alpha y}}{2} = 2\cos\alpha x\cos\alpha y$. Le cas du cosinus hyperbolique se traite de manière analogue.

II. a) On a $f(0 + 0) + f(0 - 0) = 2f(0)f(0)$, soit $f(0) = f(0)^2$ ou $f(0)(f(0) - 1) = 0$. Si $f(0) = 0$, on a, en prenant $y = 0$, $f(x) + f(x) = 2f(x)f(0) = 0$ et donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui est exclu par hypothèse. On a donc $f(0) = 1$. En prenant $x = 0$, on a alors $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, soit $f(-y) = f(y)$, pour tout $y \in \mathbb{R}$: f est donc paire.

b) On a d'une part $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x + y) + f(x - y)) = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x + y) + f(x - y)) = f''(x + y) + f''(x - y)$; et, d'autre part $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x + y) + f(x - y)) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(2f(x)f(y)) = 2f''(x)f(y)$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x + y) + f(x - y)) = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(2f(x)f(y)) = 2f(x)f''(y)$; d'où $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$. Prenons $y = 0$ et posons $f''(0) = \varepsilon\alpha^2$, où $\varepsilon = \pm 1$; la fonction f vérifie l'équation $f''(x) = \varepsilon\alpha^2 f(x)$, où . Lorsque $\alpha = 0$, l'équation s'écrit $f''(x) = 0$ et on a donc $f(x) = a + bx$. Comme $f(0) = 1$, on a $a = 1$; comme f est paire, on a $b = 0$, et donc finalement $f = 1$. Lorsque $\alpha \neq 0$, les solutions de l'équation $f''(x) = \varepsilon\alpha^2 f(x)$ forment un espace vectoriel F_ε de dimension 2 sur $\mathbb{R}$; on a : $F_{-1} = \{\, \lambda\cos\alpha x + \mu\sin\alpha x \;/\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,\}$ et $F_1 = \{\, \lambda\,\mathrm{ch}\,\alpha x + \mu\,\mathrm{sh}\,\alpha x \;/\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,\}$. Pour qu'un élément de F_ε appartienne à C, la condition $f(0) = 1$ impose que $\lambda = 1$ (puisque $\sin\alpha x = \mathrm{sh}\,\alpha x = 0$ quand $x = 0$) ; la condition de parité impose alors que l'on ait $\mu\sin\alpha x = -\mu\sin\alpha x$ (respectivement, $\mu\,\mathrm{sh}\,\alpha x = -\mu\,\mathrm{sh}\,\alpha x$), ce qui implique (puisque les fonctions $\sin\alpha x$ et $\mathrm{sh}\,\alpha x$ ne sont pas nulles) que l'on a $\mu = 0$. D'où le résultat attendu.

III. a) Comme $f(0) = 1$, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t > 0$. En intégrant l'égalité entre 0 et a par rapport à y, il vient alors, moyennant des changements de variable évidents, $\int_x^{x+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x-a}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 2f(x)\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$, soit encore $f(x) = \dfrac{1}{2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$: cette dernière égalité montre que f est dérivable en x et que l'on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t}(f(x + a) - f(x - a))$, en sorte que f' est continue, CQFD.

b) L'égalité $f'(x) = \dfrac{1}{2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t}(f(x + a) - f(x - a))$ montre que f' est dérivable, à dérivée continue : $f''(x) = \dfrac{1}{2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t}(f'(x + a) - f'(x - a))$. Plus généralement, f est indéfiniment dérivable. On a donc $T = S$.

Problème 62

I. a) L'inégalité $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ s'écrit encore $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \dfrac{a}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Le théorème du produit maximal découle donc immédiatement du théorème de l'inégalité de la moyenne géométrique.

b) Supposons le théorème du produit maximal, et soit n réels $x_i > 0$. Posons $a = \sum_{i=1}^{n} x_i$; l'inégalité $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ équivaut à $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \dfrac{a}{n}$, soit $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, l'égalité n'étant réalisée, chaque fois, que si $x_i = \dfrac{a}{n}$ pour tout i, soit donc si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

II. a) L'expression $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ est maximale en même temps que son carré $p(p-a)(p-b)(p-c)$. Puisque p est constant, cette dernière expression, à son tour, atteint un maximum en même temps que l'expression $(p-a)(p-b)(p-c)$. Or il s'agit là d'un produit de trois facteurs, $x_1 = p-a$, $x_2 = p-b$, $x_3 = p-c > 0$, dont la somme $x_1+x_2+x_3 =$

$p–a + p–b + p–c = 3p–(a+b+c) = p$ est constante. L'aire est donc maximale quand on a $p–a = p–b = p–c = \frac{p}{3}$, soit lorsque $a = b = c = \frac{2p}{3}$, c'est-à-dire lorsque le triangle ABC est équilatéral.

b) Avec des notations évidentes, l'aire latérale est donnée par l'expression $\mathrm{A} = 2xy + 2yz + 2zx$ et le volume est $\mathrm{V} = xyz$. Ce dernier est maximal en même temps que $\mathrm{V}^2 = x^2y^2z^2 = xy{\cdot}yz{\cdot}zx$, qui est produit de trois facteurs > 0 dont la somme $xy + yz + zx = \frac{\mathrm{A}}{2}$ est constante. Par suite, le volume est maximal lorsque $xy = yz = zx = \frac{\mathrm{A}}{6}$, soit pour $x = y = z = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{6}}$.

III. a) Si, en effet, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in H$ tel que, pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a $\prod_{i=1}^{n} x_i \le \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$, alors $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \frac{a}{n}$; sinon, d'après la « démonstration » indiquée, on pourrait trouver $(\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n') \in H$ tel que $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i < \prod_{i=1}^{n} \alpha_i'$.

b) La démonstration des manuels du XIX^e^ siècle suppose valide le raisonnement suivant. Étant donné un ensemble X et une application $f : X \to \mathbb{R}$, on cherche $x_M \in X$ tel que, pour tout $x \in X$, on ait $f(x) \le f(x_M)$. S'il existe une application φ de X dans X et un élément $x_0 \in X$ tels qu'on ait $f(\varphi(x_0)) = f(x_0)$ et, pour tout $x \in X\backslash\{x_0\}$, $f(x) < f(\varphi(x))$, alors x_0 est l'élément x_M cherché. (Dans le cas examiné ci-dessus, on a $X = H$, $f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ et on peut prendre $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)$ si $x_1 = x_2 = ... = x_n$ et $\varphi(x_1, x_2, ..., x_k, …, x_n) = (x_1', x_2, ..., x_k', …, x_n)$, où $x_1' = x_k' = \frac{x_1+x_k}{2}$ si $x_1 = x_2 = ... = x_{k–1} \ne x_k$, où $k \le n$.) Or on ne peut conclure que x_0 convient que si x_M existe : si, suivant le contre-exemple donné par Oskar Perron, on prend $X = \mathbb{N}^*$, avec pour f l'injection canonique de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ et pour φ l'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, on a bien $x < \varphi(x) = x^2$ pour tout $x \in X\backslash\{1\}$, mais il est évidemment faux que l'on ait $x \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

Commentaire

La lacune relevée ci-dessus dans certaines démonstrations scolaires du théorème du produit maximal – l'emploi subreptice de l'hypothèse non justifiée qu'il existe un maximum – constitue en fait une erreur classique au XIX^e^ siècle, qui tend à apparaître chaque fois qu'il s'agit de déterminer un extrémum (maximum ou minimum). Le cas le plus fameux, à cet égard, est celui du théorème isopérimétrique : de toutes les figures planes ayant un périmètre donné, le cercle est celui dont l'aire est maximale. La première démonstration de ce résultat (1838) est due à Jacob Steiner (1796-1863), qui en proposera plusieurs autres en 1842. L'historien Morris Kline écrit sur ce point (*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972, p.838) :

> Unfortunately, Steiner assumed that there exists a curve that does have maximal area. Dirichlet [1805-1859] tried several times to persuade him that his proofs were incomplete on that account but Steiner insisted that this was self-evident. Once, however, he did write (in the first of his 1842 papers) : « and the proof is readily made if one assumes that there is a largest figure. »

Il est intéressant de noter que, dans son débat avec Steiner, Dirichlet bute sur la difficulté suivante : comment convaincre autrui qu'une certaine démonstration est erronée, alors même que le théorème à démontrer est exact ? En l'espèce, Steiner n'est certainement pas un mathématicien de second rang ; mais c'est un mathématicien d'un autre âge. Après lui, la lacune que pointe Dirichlet deviendra aussi « évidente » pour les mathématiciens qu'était évidente pour Steiner l'existence d'un maximum. Dans un article paru en 1918 (« Sur une question de minimum », *Revue de l'enseignement des sciences*, janvier-février 1918, reproduit dans *L'enseignement mathématique*, octobre-décembre 1963), Henri Lebesgue (1875-1941) signalera ainsi que la première erreur connue du type examiné ici apparaît en 1816 dans le cadre d'une démonstration du théorème de d'Alembert proposée par Jean-Robert Argand (1768-1822) dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Il donne alors ce contre-exemple (*loc. cit.*, p. 230-231) :

> Considérons le problème suivant : soient deux points A et B et une droite AT ne passant par B, et demandons-nous quel est le plus court de tous les arcs de courbe d'extrémités A et B et ayant AT pour tangente en A. On peut tracer de tels arcs

> différant extrêmement peu du segment AB. Comme tout arc joignant A et B a une longueur au moins égale à AB, c'est là distance AB qui fournit ce que l'on peut appeler le minimum de la longueur des arcs considérés. (Ce mot minimum sera d'ailleurs remplacé par un autre d'ici peu.) Mais il est clair qu'aucun de ces arcs n'a la longueur AB. Voici donc un minimum qui n'est pas atteint. Ainsi, il apparaît comme essentiel de prouver l'existence de l'extremum que l'on cherche.

Bien entendu c'est par l'expression de *borne inférieure* que Lebesgue remplacera un peu plus loin dans son article le mot de *minimum*. Le passage cité se poursuit ainsi :

> Les façons de faire dans lesquelles on néglige de prouver cette existence ont été critiquées sous une forme très imagée par M. O. Perron. Cherchons avec lui le plus grand des nombres entiers. Ce ne peut être 2 car le carré de 2 est plus grand que 2 ; ni 3, car le carré de 3 est plus grand que 3 ; etc. Donc le plus grand des nombres entiers est 1.

Problème 63

I. Supposons que p est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x, y \in D_p$ et $\lambda \in [0 ; 1]$; on a :

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq p(\lambda x) + p((1-\lambda)y) = |\lambda|p(x) + |1-\lambda|p(y) = \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Le point $\lambda x + (1-\lambda)y$ appartient à D_p, qui est donc convexe. Inversement, supposons D_p convexe. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \}$; l'égalité $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)} = \dfrac{p(x)}{p(x)+p(y)}\dfrac{x}{p(x)} + \dfrac{p(y)}{p(y)+p(y)}\dfrac{y}{p(y)}$ montre que $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)} \in D_p$. On a donc $p\left(\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)}\right) \leq 1$, soit $\dfrac{p(x+y)}{p(x)+p(y)} \leq 1$ ou $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \leq 1$, CQFD.

II. a) On a : $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Comme $\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, le résultat demandé en découle.

b) Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, soit e_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathrm{e}_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathrm{e}_i$, en sorte que $x - y = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\mathrm{e}_i$; on a :

$$p(x-y) = p\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\mathrm{e}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p((x_i - y_i)\mathrm{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|p(\mathrm{e}_i).$$

Posons $M = \max_{1\leq i\leq n} p(\mathrm{e}_i)$; comme $\mathrm{e}_i \neq 0$ pour tout i, on a $M > 0$. Il vient

$$p(x-y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|p(\mathrm{e}_i) \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq Mn\ ||x-y|| = k||x-y||$$

où $k = Mn > 0$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $p(x) = p((x-y)+y) \leq p(x-y) + p(y)$ et donc $p(x) - p(y) \leq p(x-y)$. On a donc aussi $p(y) - p(x) \leq p(y-x) = p(x-y)$, en sorte que $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$. Il vient finalement : $|p(x) - p(y)| \leq k||x-y||$ (où $k = Mn$), CQFD.

c) L'application $x \mapsto ||x||$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ étant continue lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne, la sphère unité $S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \ /\ ||x|| = 1 \}$ est fermée et donc compacte ; d'après le théorème de Weierstrass, il existe des réels c et C tels que, pour tout $x \in S^{n-1}$, $c \leq p(x) \leq C$. Comme c et C sont des valeurs de p sur S^{n-1} et que $0 \notin S^{n-1}$, on a $c, C > 0$. Soit alors $x \neq 0$; on a $\dfrac{x}{||x||} \in S^{n-1}$ et donc $c \leq p\left(\dfrac{x}{||x||}\right) \leq C$, d'où $c||x|| \leq p(x) \leq C||x||$. Cet encadrement étant trivialement vrai pour $x = 0$, le résultat demandé est démontré.

d) On a vu que D_p est convexe. Par ailleurs, l'application p, lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne dans $\mathbb{R}$, est donc continue et, en conséquence, $D_p = p^{-1}([0 ; 1])$ est fermé. Par ailleurs, pour tout $x \in D_p$, on a $||x|| \leq \dfrac{p(x)}{c} \leq \dfrac{1}{c}$ et D_p est donc borné. Finalement D_p est compact dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. Enfin, puisque si $||x|| < \dfrac{1}{C}$ on a $p(x) \leq C||x|| < 1$, D_p contient la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{C}$ et est donc d'intérieur non vide.

III. a) Du fait que $\overset{\circ}{D} \neq \varnothing$, il existe $a \in D$ et $\varepsilon > 0$ tels que la boule euclidienne ouverte $B(a ; \varepsilon) \subset D$. Par symétrie de centre 0, on a aussi $B(-a ; \varepsilon) \subset D$. Soit x tel que $||x|| < \varepsilon$; on a $||(x+a) - a|| = ||x|| < \varepsilon$ et donc $x + a \in B(a ; \varepsilon)$

$\subset D$. De même, $\|(x - a) - (-a)\| = \|x\| < \varepsilon$ et donc $x - a \in B(-a\ ;\ \varepsilon) \subset D$. Comme D est convexe et que $x = \frac{1}{2}(x + a) + \frac{1}{2}(x - a) = x$, on en déduit que $x \in D$ et donc que $B(0\ ;\ \varepsilon) \subset D$: $0 \in \overset{\circ}{D}$.
b) Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(0\ ;\ \varepsilon) \subset D$ et soit alors $y \in B(0\ ;\ \varepsilon) \cap \mathbb{R}_+^*x$; il existe $\mu > 0$ tel que $x = \mu y \in \mu D$, CQFD.
c) On écarte le cas trivial $\mu_1 = 0$. Soit $y \in D$. Comme D est convexe et $0, y \in D$, $\frac{\mu_1}{\mu_2}y \in D$ et on a : $\mu_1 y = \mu_2\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}y\right) \in \mu_2 D$. Il en résulte que, si $\mu_1 \in \{\ \mu > 0\ /\ x \in \mu D\ \}$ et si $\mu_2 \geq \mu_1$, alors $\mu_2 \in \{\ \mu > 0\ /\ x \in \mu D\ \}$. Soit une suite (μ_k) de réels > 0 tendant vers μ_x tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mu_k D$. Si $\mu_x > 0$, la suite $\left(\frac{x}{\mu_k}\right)$ est bien définie et prend ses valeurs dans D ; comme D est fermé, sa limite $\frac{x}{\mu_x} \in D$ et on a donc $x \in \mu_x D$, en sorte que $\mu_x \in \{\ \mu > 0\ /\ x \in \mu D\ \}$ et donc que $\mu_x = \inf\{\ \mu > 0\ /\ x \in \mu D\ \}$. Il en résulte que $\{\ \mu > 0\ /\ x \in \mu D\ \} = [\mu_x\ ;\ +\infty[$. Si $\mu_x = 0$, la suite (μ_k) vers 0 ; D, compact, est borné et il existe donc M tel que, pour tout $y \in D$, $\|y\| \leq M$; pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $y_k \in D$ tel $x = \mu_k y_k$ et on a donc $\|x\| = \mu_k\|y_k\| \leq \mu_k M$, majorant qui tend vers 0 quand k tend vers l'infini : on a donc $\|x\| = 0$, soit $x = 0$. Dans ce cas, $\{\ \mu > 0\ /\ x \in \mu D\ \} = [0\ ;\ +\infty[$.
d) Puisque $0 \in D$, on a $0 \in \mu D$ quel que soit $\mu > 0$; par suite $p(0) = \inf\{\ \mu > 0\ /\ x \in \mu D\ \} = \inf \mathbb{R}_+^* = 0$. Inversement, on vient de voir que, si $p(x) = 0$, alors $x = 0$: la condition (1) est donc satisfaite. Montrons ensuite que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$. L'égalité est vraie si $\lambda = 0$. Supposons $\lambda > 0$; on a $p(\lambda x) = \inf\{\ \mu > 0\ /\ \lambda x \in \mu D\ \} = \inf\{\ \mu > 0\ /\ x \in \frac{\mu}{\lambda}D\ \} = \lambda \inf\{\ \frac{\mu}{\lambda} > 0\ /\ x \in \frac{\mu}{\lambda}D\ \} = \lambda p(x)$. Supposons maintenant $\lambda = -|\lambda| < 0$; puisque $-D = D$, on a : $p(\lambda x) = \inf\{\ \mu > 0\ /\ \lambda x \in \mu D\ \} = \inf\{\ \mu > 0\ /\ -\lambda x \in -\mu D\ \} = \inf\{\ \mu > 0\ /\ |\lambda|x \in \mu D\ \} = p(|\lambda|x) = |\lambda|p(x)$. Si $p(x) \leq 1$, $x \in p(x)D \subset D$, en sorte que $D_p \subset D$. Si $x \in D$, on a $1 \in \{\ \mu > 0\ /\ x \in \mu D\ \}$ et donc $p(x) = \inf\{\ \mu > 0\ /\ x \in \mu D\ \} \leq 1$, en sorte que $D \subset D_p$. D'où le fait que $D_p = D$. Comme D est convexe, p est une norme, dont la boule unité est donc D.

Problème 64

I. a) Pour tout $(d_1, \ldots, d_r) \in \{\ 0, 1, \ldots, 9\ \}^r$, on a : $P(X = (d_1, \ldots, d_r)) = P(X_1 = d_1, \ldots, X_r = d_r)$. Les v.a. $X_1, \ldots, X_r$ étant indépendantes, on a $P(X_1 = d_1, \ldots, X_r = d_r) = P(X_1 = d_1) \ldots P(X_r = d_r) = 0{,}1^r$, CQFD.
b) Les ensembles E^r et N_r ayant l'un et l'autre 10^r éléments, il suffit de montrer que l'application φ est surjective. Or on sait que tout entier de 0 à $10^r - 1$ s'écrit, en notation décimale, $d_1, \ldots, d_r$, écriture qui, par définition, désigne l'entier $10^{r-1}d_1 + 10^{r-2}d_2 + \ldots + 10d_{r-1} + d_r$.
c) La v.a. X étant uniforme sur E^r, il en est de même de $\varphi\circ X$ sur N_r et de $U = 10^{-r}\varphi\circ X$ sur I_r puisque les applications φ de E^r dans N_r et $k \mapsto 10^{-r}k$ de N_r dans I_r sont des bijections. Soit ℓ le plus grand entier k tel que $10^{-r}k < a$; si $n \geq 1$, on a : $10^{-r}\ell < a \leq 10^{-r}(\ell + 1) \leq 10^{-r}(\ell + n) < b \leq 10^{-r}(\ell + n + 1)$. Il vient donc $10^{-r}(\ell + n) - 10^{-r}(\ell + 1) < b - a < 10^{-r}(\ell + n + 1) - 10^{-r}\ell$, soit $10^{-r}(n - 1) < b - a < 10^{-r}(n + 1)$. On a par ailleurs $P(a \leq U < b) = 10^{-r}\mathrm{Card}\ \{\ k \in N_r\ /\ a \leq 10^{-r}k < b\ \} = 10^{-r}n$. L'encadrement $10^{-r}(n - 1) < b - a < 10^{-r}(n + 1)$ s'écrit encore $-10^{-r} < b - a - 10^{-r}n < 10^{-r}$, soit $|b - a - 10^{-r}n| < 10^{-r}$, c'est-à-dire enfin $|P(a \leq U < b) - (b - a)| < 10^{-r}$. Si $n = 0$, on a $P(a \leq U < b) = 0$ et $0 < b - a \leq 10^{-r}$, et donc aussi $|P(a \leq U < b) - (b - a)| = |(b - a)| < 10^{-r}$.

II. a) On a : $P(Y \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x)$. L'application F étant strictement croissante, on a : $P(Y \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$.
b) On a : $P(Y = v_i) = P(\sum_{j=1}^{i-1} p_j \leq U < \sum_{j=1}^{i} p_j) = \sum_{j=1}^{i} p_j - \sum_{j=1}^{i-1} p_j = p_i$.