Excursus

sur l'enseignement des mathématiques

La lettre du GD « Développer / Diffuser »
Responsable : Yves Chevallard

N° 5
15 juillet 2004

Éditorial

C'est un trait permanent de nos cultures que de croire le monde intelligible et réformable sans autres outils de pensée et d'action que ceux dont nous disposons déjà et que le passage du temps a rendu respectables. Parce que renaît sans cesse en lui l'illusion que le monde est finalement chose simple, ou devrait l'être, l'*homo faber* est porté à croire qu'il pourrait se passer de ce qu'il a forgé, et surtout de ce que d'autres ont forgé – ceux d'une autre génération ou d'une autre « ethnie » intellectuelle. Longtemps, en France, on refusa ainsi la statistique avec hauteur ; il n'est pas clair que ce temps soit derrière nous. Semblablement, on tarde aujourd'hui à entendre qu'on ne saurait se saisir des problèmes du juste partage des connaissances et des savoirs, c'est-à-dire des problèmes de la didactique, sans forger un outillage conceptuel approprié, dont la maîtrise rigoureuse exige qu'indéfiniment on se déprenne des charmes illusoires de toutes les inerties culturelles ! YC.

Questions de théorie

En matière d'enseignement et d'apprentissage, trop de praticiens sont encore des amants éblouis du pratico-pratique. Or pour agir dans le monde et sur le monde, il faut aussi penser le monde et penser l'action qu'on y développe. Parce que nous avons besoin de pensée – de logos *–, nous avons besoin d'outils conceptuels bien pensés et rigoureusement mis en œuvre. Selon un adage que Kurt Lewin (1935) a popularisé,* « there is nothing so practical as a good theory »*, rien n'est plus pratique qu'une bonne théorie – telle est la devise de cette rubrique.*

LA NOTION DE TECHNIQUE : ENJEUX & OBSTACLES *(SUITE)*

• La réception des notions de *technique* et de *technologie* (voir le numéro 3 d'*Excursus*) bute quelquefois sur un obstacle auquel sembler échapper, par contraste, la notion de *théorie*. Cette difficulté de réception n'a, au vrai, que partiellement à voir avec les *notions* de technique et de technologie que l'on a introduites : elle s'attache d'abord aux *mots* eux-mêmes. Prisonniers volontaires et parfois entêtés d'usages linguistiques figés, d'aucuns rechignent en effet à accepter un emploi de ces mots qui serait à leurs yeux doublement récusables : d'abord, parce qu'ils renvoient pour eux à d'autres domaines de l'activité humaine que le domaine mathématique ; ensuite, parce que, en mathématiques, ce sont d'autres mots qui, jusqu'ici, leur ont été imposés – celui de « méthode » en lieu et place de « technique », par exemple.

• En mathématiques, en effet, on parle libéralement de *méthode* – de résolution des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues, ou des équations du second degré, etc. Dans les textes gouvernant l'enseignement primaire français, on lit par exemple : « La reconnaissance d'une situation de proportionnalité, son sens et sa résolution par la *méthode* la mieux adaptée (passage par la valeur unitaire ou opération directe, utilisation de la règle de trois) constituent un objectif important du cycle 3 ». « Méthode », donc, là où le langage introduit jusqu'ici voudrait « technique ». De même, précisent d'emblée les textes relatifs au collège, « les *méthodes* mathématiques s'appliquent à la résolution de problèmes courants », avant d'ajouter qu'il importe « d'éviter l'émiettement et de faciliter la bonne structuration des savoirs et des *méthodes* ». Le travail en classe doit, pour cela, comporter régulièrement de brefs moments de synthèse ; et celle-ci, disent les mêmes textes, doit porter « non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître, mais aussi sur les *méthodes* de résolution de problèmes qui les mettent en jeu ». En classe de 6^e^, l'élève doit apprendre à reporter une longueur, à reproduire un angle ou un arc de cercle de centre donné, à tracer, par un point donné, la perpendiculaire ou la parallèle à une droite donnée, mais tout cela, indique-t-on aux professeurs, « sur papier blanc et sans que la *méthode* soit imposée » ; en 4^e^, souligne un commentaire un rien sibyllin du travail à conduire en statistique, « l'élève sera confronté à des situations courantes où la *méthode* de calcul est à remettre en cause » ; en 3^e^, le document d'accompagnement du programme attire l'attention sur le fait que « l'étude systématique des différentes *méthodes* de résolution algébrique d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues n'est pas un objectif du programme » ; en 2^de^, en géométrie, on s'efforcera, enjoint le programme, de « proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de *méthodes* faits au collège » ; en 1^re^ S, le programme indique que « le choix d'une *méthode* appropriée à chaque problème fait partie de l'apprentissage de la géométrie » ; etc. De ces usages du mot « méthode », une généalogie pléthorique pourrait être établie. Ainsi des méthodes en géométrie : en 1879, par exemple, paraît à Copenhague un ouvrage signé de Julius Petersen (1839-1910), qui mérite toujours d'être médité : il sera publié en traduction française en 1946 sous le titre *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques* ; plus de deux siècles et demi plus tôt, en 1618, René Descartes (1596-1650), alors jeune cadet de l'armée en garnison à Breda, mis au défi de résoudre un problème de géométrie qu'un inconnu avait fait afficher par les rues de la ville, l'examinait « sur les règles de sa *méthode* » et en trouvait aussitôt la solution. Ainsi encore de ces méthodes qu'une synthèse, nous dit-on, se doit de consigner : le programme de 2^de^ qui précédait celui aujourd'hui en vigueur disait déjà que « la synthèse, qui constitue le cours proprement dit, […] porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître et savoir utiliser, mais aussi sur les *méthodes* de résolution de problèmes qui les mettent en jeu ». Ce passage, au demeurant, s'inspirait lui-même, vraisemblablement, d'un important article du mathématicien Georges Bouligand (1889-1979), publié en 1948 sous le titre « Regards sur la formation mathématique » dans le numéro spécial des Cahiers du Sud dirigé par François Le Lionnais (1901-1984) présentant *Les grands courants de la pensée mathématique* : Bouligand y demandait que « la synthèse » elle-même soit précédée par l'établissement d'un « répertoire » où ranger préalablement les *notions*, *méthodes*, *résultats* construites par le travail sur des problèmes, alpha et oméga de l'activité mathématique.

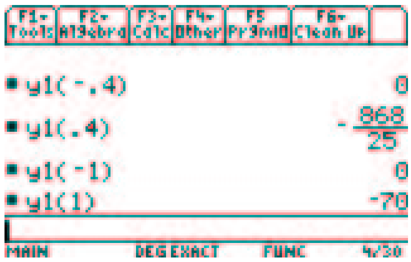
• « Méthode » vient du grec *methodos*. Signifiant à l'origine « cheminement, poursuite » (de *meta*, et de *hodos*, route, voie, direction), le mot a vu historiquement son emploi passer du registre constatif (le chemin suivi) au registre normatif (le chemin à suivre). Le *Dictionnaire historique de la langue française*, auquel nous empruntons ces indications, ajoute : « Le sémantisme du mot s'enrichit au XVII[e] s. tant dans le domaine intellectuel (1637, Descartes, *Discours de la méthode*) que technique, où il est un quasi-synonyme de *procédé,* de *moyen* au sens de "manière de faire" (1647) ». La parenté conceptuelle avec l'usage que nous faisons de « technique » est donc évidente : une technique est une « manière de faire », une façon d'accomplir des tâches d'un certain type. Pourquoi alors récuser « méthode » ? Deux raisons solidaires sont à invoquer. La première se trouve dans la tendance avérée à désigner sous le nom de méthode des techniques qui apparaissent, dans le flux de l'activité humaine, suffisamment saillantes pour mériter, dans la culture institutionnelle où l'on se situe, d'être reconnues et nommées, ou du moins mises en avant. N'est ainsi pas méthode qui veut parmi la foule des humbles techniques qui font le quotidien de la vie d'une institution ! Parlera-t-on, par exemple, de méthode pour se gratter l'oreille, ou même pour ôter ses chaussures ? La méthode apparaît ici comme une technique infatuée d'elle-même, une technique qui a réussi dans un système de distinction qu'il convient d'étudier mais dont on ne saurait sans autre forme de procès reprendre à son compte ! Pour un motif fort proche, Célestin Freinet (1896-1966) ne voulait pas qu'on nommât « méthode » ce qu'il proposait à titre de « technique nouvelle » en matière d'enseignement primaire, et notait à ce propos sans complaisance : « Il suffit […] qu'un éducateur entrevoie un procédé nouveau utile à la conduite de sa classe pour qu'il nomme "méthode" son essai, alors même qu'il n'y a rien de méthodique dans sa recherche » (cité *in* Madeleine Freinet, *Élise et Célestin Freinet*, Stock, 1997, p. 183). Parler de méthode, vocable trop marqué par un souci de distinction plus ou moins subreptice, risque fort de masquer, voire de tuer dans l'œuf, ces mille techniques qui ne se montent pas du col mais qui sont pourtant le tissu interstitiel dont notre quotidien, mathématique et autre, est fait. Dans une logique didactique, l'appréhension anthropologique large des manières de faire sur lesquelles repose, toujours et partout, l'activité humaine devient davantage possible dès lors qu'on renonce à les nommer « méthodes » pour se tourner vers le mot de technique, d'emploi *a priori* plus libre, comme Freinet l'avait bien senti.

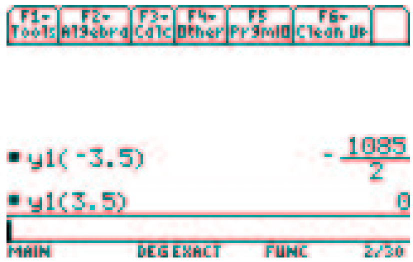
• Il est vrai que « technique » a lui aussi un sémantisme qui semble en imposer, même s'il s'est plus récemment construit. C'est au XIX[e] s., précise le dictionnaire déjà cité, que le mot devient plus particulièrement associé à l'activité de production d'objets, distinguée en cela des domaines « théoriques » qui sous-tendent cette production. Ainsi est-il bientôt « substantivé au féminin (1842), *la technique* […] correspondant à l'ensemble des procédés empiriques employés dans la production d'une œuvre, l'obtention d'un résultat, en général ou en particulier (*une, des techniques*) ». Le même dictionnaire ajoute : « Par extension, ce nom désigne couramment une manière précise de procéder, en quelque domaine que ce soit ». Bien entendu, même dans cet emploi étendu, qui est celui que nous mobilisons ici, il conserve une connotation « matérielle » qui peut déranger une vision intellectualiste de l'activité humaine. Par contraste, l'usage de « technique » a alors l'heureux mérite de rappeler que l'activité intellectuelle elle-même reste pétrie de matérialité, quand bien même il ne s'agirait que de la matérialité des signes, des « ostensifs » sans lesquels aucune pensée, et donc aucune action humaine n'est possible.

• Il est une seconde raison, qui s'articule encore au sémantisme prétentieux de « méthode », pour révoquer l'usage foisonnant de ce mot. Parce qu'il se veut valorisant, l'emploi de « méthode » tend en effet à devenir englobant et à renvoyer ainsi à des réalités qui vont du précis au flou : la « méthode du pivot de Gauss » est une chose, la « méthode expérimentale » est déjà une entité moins clairement définie, où viennent se loger tout un spectre de pratiques et de pensées. Pour le dire maintenant de manière positive, on quitte alors, dans le meilleur des cas, l'ordre des techniques nettement délimitées, relatives à des types de tâches eux-mêmes bien repérés, pour entrer dans le domaine des technologies – mot dont la réception dans ce contexte n'est, il est vrai, pas plus facile au béotien. La « méthode » de Descartes en géométrie est une technologie mathématique puissante qui permet au jeune homme de vingt-deux ans de produire la technique appropriée au problème qu'il rencontre. Dans la préface à son *Calcul vectoriel* paru en 1929 (chez Armand Colin), Raoul Bricard évoque la faible diffusion de la technologie vectorielle – le « calcul » vectoriel –, dont il se fait le promoteur, et qu'il compare à la technologie cartésienne née quelque trois siècles plus tôt, écrivant à ce propos : « Le calcul vectoriel a mis assez longtemps à pénétrer en France, et on ne peut dire encore qu'il y soit couramment pratiqué. […] Avant deux ou trois lustres, sans doute, il ne sera permis à aucun mathématicien d'en ignorer l'emploi. Mais j'estime excessif de proclamer qu'il doit supplanter la méthode cartésienne dans tous les domaines où régnait celle-ci ». Pourquoi donc parler de technologie lorsque la tradition parle – encore – de méthode ? On voit d'abord que, ce faisant, on sépare, au sein d'un composé notionnel que le mot de méthode enveloppe et dissimule à la fois, deux composants fonctionnellement distincts : la technique, et la technologie. L'observation montre en effet que l'emploi de « méthode » tend à replier la description de l'activité humaine sur ses aspects réputés nobles, noétiques, bref, sur sa composante technologique (ou plutôt technologico-théorique) ; il conduit par là, du même mouvement, à l'occultation de la composante technique, entité essentielle mais vouée dès lors à n'apparaître plus que comme la chute dans le sensible d'une pensée qui la surplomberait. Prenons ici un exemple mathématique : la résolution du système des équations $2x + 3y + 1 = 0$ et $x - 2y + 4 = 0$. Une certaine technique de résolution τ conduit à accomplir les tâches suivantes : former l'égalité $\lambda(2x + 3y + 1) + \mu(x - 2y + 4) = 0$, réduire l'expression figurant dans le membre de gauche, ce qui donne l'équation $(2\lambda + \mu)x + (3\lambda - 2\mu)y + (\lambda + 4\mu) = 0$, résoudre l'équation en x que l'on obtient en donnant à λ et μ des valeurs qui annulent le terme en y, par exemple $\lambda = 2$ et $\mu = 3$, ce qui donne $x = -\dfrac{\lambda + 4\mu}{2\lambda + \mu} = -\dfrac{2 + 4 \times 3}{2 \times 2 + 3} = -2$, puis résoudre l'équation en y obtenue pour des valeurs de λ et μ qui annulent le terme en x, par exemple $\lambda = -1$ et $\mu = 2$, ce qui donne $y = -\dfrac{\lambda + 4\mu}{3\lambda - 2\mu} = -\dfrac{-1 + 4 \times 2}{3 \times (-1) - 2 \times 2} = 1$, enfin conclure que la solution du système est le couple formé des valeurs ainsi trouvées pour x et y, ici $(-2, 1)$. Quelle technologie θ peut engendrer la technique τ, ou au moins la justifier ? La réponse peut tenir dans les faits suivants : les équations proposées, $d_1(x, y) = 0$ et $d_2(x, y) = 0$, sont celles de deux droites supposées sécantes en un point S dans un plan muni d'un repère (O, I, J) ; expliciter la solution de ce système revient à donner sous la forme $x = a$ et $y = b$ les équations des droites passant par S respectivement parallèles aux droites (OJ) et (OI) ; or toute droite du faisceau de droites passant par S a une équation de la forme $\lambda d_1(x, y) + \mu d_2(x, y) = 0$; etc. De cette technologie θ la technique τ découle facilement ; mais la technologie étant donnée, la technique qu'elle porte en elle doit encore passer de la puissance à l'acte, et c'est cela que la distinction technique / technologie permet de penser et de gérer – l'implémentation, dans un système de travail déterminé, de la technique que la technologie semble engendrer comme naturellement.

• Pourquoi appeler « technologie » ce qui engendre ou explique une technique donnée, alors que le mot de technologie est aujourd'hui tellement sollicité pour porter d'autres sens ? Le mot est, au XVIIIe siècle, emprunté au grec tardif *tekhnologia*, exposé des règles d'un art, et se trouve d'abord employé avec le sens du grec. Johann Beckmann (1739-1811), que l'on cite comme l'ayant pour la première fois utilisé – en allemand – en 1772, écrit dans son *Anleitung zur Technologie* (Göttingen, 1777) : « Au lieu qu'on montre seulement dans les ateliers comment on doit suivre les instructions et les habitudes du maître pour fabriquer la marchandise, la technologie donne une instruction approfondie et selon un ordre systématique, permettant de trouver, à partir de principes véritables et d'expériences sûres, les moyens d'atteindre ce but final… » On retrouve ici la distinction de la technique (les instructions à suivre) et de la technologie (un corps de connaissances qui permet de retrouver les instructions à suivre). Bien entendu, « la » technologie dont Beckmann se fait le héraut se veut à la fois science universelle (elle doit expliquer « complètement, méthodiquement et distinctement tous les travaux, leurs conséquences et leurs raisons », note-t-il dans le même ouvrage) et limitée aux procédés matériels (« la technologie, précise-t-il encore, est la science qui enseigne le traitement des produits matériels ou la connaissance des métiers »). En 1941 encore, dans une communication intitulée significativement *Les techniques et la technologie*, Marcel Mauss (1872-1950) écrira : « La technologie est une science très largement développée ailleurs que chez nous. Elle prétend à juste titre étudier toutes les techniques, toute la vie technique des hommes depuis l'origine de l'humanité jusqu'à nos jours » (*Le travail et les techniques*, numéro spécial du « Journal de psychologie », 1948, p. 71). Par contraste, l'usage que l'on fait ici du mot ne suppose nullement une « science » unique et universelle, mais renvoie à un problème qui, lui, est universel – quoique toujours spécifique de contenu – et indéfiniment résurgent au cœur de l'activité humaine en toute institution : celui de la production, de la justification, de la lisibilité et de l'intelligibilité des manières humaines de faire, *en tout domaine*. Partout et toujours, l'homme, ce néotène, doit se créer des façons de survivre et de vivre qui ne lui sont nullement données toutes faites ; et toujours et partout il ne peut renoncer à *penser* son faire et celui d'autrui, à en produire une théorie et une technologie, fût-ce à vil prix. Il y a donc bien continuité *et* rupture avec la notion classique de technologie – celle de Beckmann et de Mauss –, entendu comme désignant la science supposée d'une classe plus ou moins vaste de techniques. Dans une perspective anthropologique ouverte, on désigne ici par technologie toute élaboration, si spontanée soit-elle, visant à expliquer, à rendre intelligible, à produire une technique ou un certain ensemble (flou) de techniques, l'étude de ces « ethnotechnologies » étant envisagée du point de vue de leur création et de leur diffusion au sein des institutions de la société – c'est-à-dire du point de vue didactique.

• Cet emploi de « technologie » soulève une autre difficulté : quelle relation et quelle compatibilité a-t-il avec l'usage qu'on fait du terme lorsqu'on évoque les « nouvelles technologies de l'information », « les technologies modernes », etc. ? « De nos jours, note le dictionnaire déjà plusieurs fois cité, le mot [de technologie], comme ses dérivés, tend à être employé par anglicisme *(technology)* pour désigner une technique de pointe, moderne et complexe, sinon toute technique, avec une connotation méliorative, publicitaire et moderne. » La chose est indubitable. Notons toutefois que c'est au français que l'anglais a emprunté, au XIXe siècle, le substantif *technique*, qu'un dictionnaire de la langue anglaise d'aujourd'hui définit très classiquement comme désignant « a way of efficiently accomplishing a task in a manner that is not immediately obvious or straightforward ». Notons aussi que *technology* désigne d'abord, classiquement et banalement, « the study of or a collection of techniques ». Cela rappelé, comment entendre, sans en subvertir le sens, mais en le redressant pour l'intégrer à un emploi plus large, l'usage du mot « technologie » dans une assertion comme « Depuis deux ans, j'utilise à fond les nouvelles technologies ! » ? Revenons pour cela à la notion de technique. L'accomplissement d'une tâche t selon une technique τ conduit à accomplir des tâches $t_1, \ldots, t_n$ selon des techniques $\tau_1, \ldots, \tau_n$. On dit alors que les *types* de tâches $T_1, \ldots, T_n$ dont relèvent $t_1, \ldots, t_n$ sont *motivés* par la technique τ (ce qu'on peut noter $\tau \mapsto T_1, \ldots, T_n$ ou $T_1, \ldots, T_n \Rightarrow \tau$). En nombre de cas, y compris lorsqu'un type de tâches T relève d'une discipline bien déterminée, les techniques τ_i relatives aux types de tâches T_i motivés par τ se trouvent engendrées (ou justifiées) par des technologies θ_i *hétérogènes*, relevant de domaines ou de secteurs de la connaissance différents. Considérons ainsi le type de tâches consistant à rechercher les racines rationnelles d'une équation à coefficients entiers, telle $10\,x^3 - 21\,x^2 - 45\,x - 14 = 0$. Une technique consiste à examiner tous les rationnels – ils sont en nombre fini ! – de la forme $\pm\, p/q$ où $p \in \mathbb{N}^*$ divise le terme constant, ici 14, et $q \in \mathbb{N}^*$ divise le coefficient directeur, ici 10. Parce qu'on sait que $14 = 2 \times 7$, on voit que $p \in \{ 1, 2, 7, 14 \}$; parce qu'on sait que $10 = 2 \times 5$, on voit de même que $q \in \{ 1, 2, 5, 10 \}$. On a besoin ici, on le voit, de la technologie de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Pour aboutir, le travail restant à faire n'est pas négligeable (la technique utilisée n'est pas bien économique) : on sait seulement, en effet, que les solutions rationnelles, s'il en existe, sont parmi les rationnels $\pm\, p/q$; il reste donc à vérifier, pour chacune des 24 valeurs obtenues (à savoir ± 0,1 ; ± 0,2 ; ± 0,4 ; ± 0,5 ; ± 0,7 ; ± 1 ; ± 1,4 ; ± 2 ; ± 2,4 ; ± 3,5 ; ± 7 ; ± 14), si elle annule ou non l'expression $10\,x^3 - 21\,x^2 - 45\,x - 14$. Pour cela, on peut utiliser une calculatrice scientifique, en y définissant la fonction $y_1(x) = 10\,x^3 - 21\,x^2 - 45\,x - 14$; on trouve ainsi qu'on a $y_1(-\,0{,}4) = y_1(-\,1) = y_1(3{,}5) = 0$.





Cela fait, on contrôlera le résultat en vérifiant qu'on a bien $10(x + 0{,}4)(x + 1)(x - 3{,}5) \equiv 10\,x^3 - 21\,x^2 - 45\,x - 14$: ce contrôle, fondé sur la technologie des polynômes (sur $\mathbb{R}$), peut être, à nouveau, réalisé à l'aide d'une calculatrice scientifique. La technique τ mise en œuvre sollicite donc, à travers les techniques τ_i qu'elle active, une pluralité de technologies. *Sa* technologie θ sera un composé d'éléments empruntant à *plusieurs* grandes technologies d'hier et d'aujourd'hui – à l'algèbre, à l'arithmétique, à l'algorithmique, à l'informatique, à l'électronique, etc.

• Analysons un peu plus finement les choses : toute technique se laisse analyser en *deux* composantes : un *dispositif*, et des *« gestes »*, accomplis dans le cadre de ce dispositif. Les technologies mobilisées par une technique sont celles qui permettent de produire ou de justifier tant les dispositifs que les gestes que sollicitent cette technique. Dans le cas examiné plus haut, un composant du dispositif est la calculatrice, fruit de technologies algorithmiques, informatiques, électroniques, etc. Dans le faisceau de technologies hétérogènes ainsi combinées pour produire la technique τ, tel regard institutionnel apercevra surtout telle ou telle technologie, par exemple les technologies informatiques et électroniques utiles : ce sera le cas, notamment, de qui se préoccupe avant tout de la diffusion sociale de ces technologies-là. Le mathématicien, en revanche, verra surtout la mobilisation de technologies… mathématiques, et notamment de la technologie de la divisibilité, qui, à ses yeux, fonde la technique τ en permettant par exemple, dans le cas auquel on s'est arrêté plus haut, d'en donner la justification suivante : si p et q sont premiers entre eux, alors, en multipliant l'égalité $y_1(p/q) = 0$ par q^3, on arrive d'une part à l'égalité $10\,p^3 - 21\,p^2q - 45\,pq^2 = 14\,q^3$, qui montre que p divise $14\,q^3$ et donc divise 14, d'autre part à l'égalité $10\,p^3 = 21\,p^2q - 45\,pq^2 - 14\,q^3$, qui montre que q divise $10\,p^3$ et donc divise 10. On retrouve en tout cela un fait essentiel et constant en tout domaine de l'activité humaine : l'*hétérogenèse* des dispositifs, des gestes, bref des techniques. Ce phénomène inscrit en toute technique des « traces » de technologies qui sont non seulement de différentes natures, ainsi qu'on l'a dit, mais qui, presque toujours, ont été produites en des époques historiques différentes, comme le souligne

Michel Serres à travers ce simple exemple : « Considérez une voiture automobile d'un modèle récent : elle forme un agrégat disparate de solutions scientifiques et techniques d'âges différents ; on peut la dater pièce à pièce : tel organe fut inventé au début du siècle, l'autre il y a dix ans et le cycle de Carnot a presque deux cents ans. Sans compter que la roue remonte au néolithique. L'ensemble n'est contemporain que par le montage, le dessin, l'habillement, parfois seulement par la vanité de la publicité » (*Éclaircissements*, entretiens avec Bruno Latour, François Bourin, 1992, p. 72). Il est des époques, anciennes et modernes, où, dans une technique de calcul (par exemple), c'est l'algorithme qui apparaît « moderne », parce qu'il emprunte à une technologie arithmétique récemment disponible. Ainsi en va-t-il, en Occident, avec l'apparition et la très lente diffusion, à partir du XIII[e] siècle, de l'*algorisme*, c'est-à-dire du calcul écrit, qui utilise les chiffres indo-arabes et dont les zélateurs, les « algoristes », s'opposeront longtemps aux « abacistes », sectateurs de l'emploi maintenu d'un instrument ubiquitaire, l'*abaque*. Ainsi en va-t-il encore, beaucoup plus tard, avec le calcul *décimal* proposé par Simon Stevin (v. 1548-1620) dans un opuscule intitulé (en néerlandais) *De Thiende* (1585), le dixième, que son auteur traduit en français la même année sous le titre de *Dîme*, et qu'il présente comme « Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes », c'est-à-dire permettant de se passer de la technologie des nombres fractionnaires (« rompus »), pourvoyeuse de techniques fort anciennes mais jugées exagérément pénibles. Mais c'est parfois le dispositif matériel où s'inscrivent les traces du calcul qui est l'élément d'innovation : ainsi en va-t-il lorsque, en Occident toujours, se répand au XV[e] siècle l'usage de l'ardoise comme support d'écriture qui remplacera la planchette à poussière ou la tablette d'argile : « The gain to the art of computation which resulted from this invention can hardly be realized at the present time », écrit D.E. Smith dans son *History of Mathematics* (vol. II, Dover Publications, 1958, p. 178). Concluons : lorsque, sous l'influence de l'anglais, nous parlons de technologies à propos de techniques (comme il en va par exemple s'agissant des TICE, des technologies de l'information et de la communication pour l'éducation), nous ne faisons jamais que mettre en avant ce à quoi la technique – mathématique, didactique, etc. – ainsi évoquée paraît devoir l'essentiel de son existence. Dans une telle perspective, ce qui est tenu pour central depuis tel point de vue aura, d'un autre point de vue, le statut de simple adjuvant, sans qu'existe jamais de point de vue totalisant qui situerait chaque technologie à sa « juste place » dans une hiérarchie technologique, parce qu'il n'existe pas, dans l'unité fonctionnelle d'une technique, de hiérarchie des ingrédients qui la font ce qu'elle est. *(À suivre)*

Parcours d'étude et de recherche

En un collectif quelconque – classe du secondaire, groupe de professeurs, association de citoyens, etc. –, un parcours d'étude et de recherche – un PER – est un chantier thématique large, à la programmation ouverte, où, sans complaisance à l'endroit des réponses convenues, peuvent se tracer, lentement, laborieusement, des chemins non encore reconnus, peu à peu balisés par les questions vives que le thème étudié porte en lui. Le premier chantier ouvert ici est, pour des raisons que l'on va préciser, celui de la gestion de la diversité.

COMMENT GÉRER LA DIVERSITÉ DES ÉLÈVES ? *(SUITE)*

• Notes exploratoires : des travaux *diversifiés* permettent de *rassembler* la classe !

1. Une classe n'est pas un simple rassemblement contingent d'individus, chacun plus ou moins figés dans une certaine posture scolaire. Il est ainsi des élèves « fluctuants », alternant

par exemple bonnes et moins bonnes notes, qui peuvent parfois irriter le professeur. Pourtant, on peut montrer que ces élèves jouent un rôle positif dans de la vie de la classe en ce qu'ils permettent à ce collectif de se regarder comme relativement uni et cohérent. Si, en effet, il est possible à quelques-uns d'osciller entre la tête et la queue du peloton, c'est que, dans cette classe, chacun ou presque « reste dans la course », même si la place qu'il ou elle occupe à tel moment est peu flatteuse.

2. Le rôle unificateur qu'assument sans le savoir les élèves « nomades » s'exprime dans un registre plus irréfutable encore : dans la formation de l'image chiffrée de la classe par le truchement des notes trimestrielles. Montrons-le ici à l'aide d'un modèle qui stylisera volontairement la fabrication de ces notes. Soit $X_i : \Omega \to [0 ; 20]$ $(1 \le i \le n)$ les notes entrant dans la formation de la moyenne trimestrielle : chacun des élèves $\omega \in \Omega$ a une série de n notes $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. La moyenne trimestrielle Y est alors donnée par $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Où se situe alors le phénomène indiqué ? La moyenne de la classe est $m(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(X_i)$. Mais si s désigne l'écart type, *on n'a pas* sauf exception $s(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s(X_i)$. L'écart type des moyennes trimestrielles *n'est pas* la moyenne des écarts types des moyennes aux différents devoirs. En fait, l'écart type des moyennes trimestrielles est *inférieur* à la moyenne des écart types des différentes séries de notes assignées au cours du trimestre ! Pourquoi cela ?

3. Le lecteur doit se rappeler en ce point que $s^2(X)$ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique $\mathrm{cov}(X, Y) = s(X)s(Y)r(X, Y)$, où $r(X, Y)$ est le coefficient de corrélation des variables X et Y. On a donc : $s(Y) = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} s^2(X_i) + 2\sum_{i \neq j} s(X_i)s(X_j)\underline{r(X_i, X_j)}}$. Or, en élevant au carré l'expression de $s(Y)$, puis en prenant la racine carrée, on a : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s(X_i) = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} s^2(X_i) + 2\sum_{i \neq j} s(X_i)s(X_j)}$. Dans l'expression de $s(Y)$, le facteur souligné, le coefficient de corrélation $r(X_i, Y_i)$, peut, grâce à l'action des élèves nomades, être très inférieur à 1 : $s(Y)$ est donc d'autant plus inférieur à la moyenne des écarts types $s(X_i)$ que les devoirs X_i *sont deux à deux plus faiblement corrélés*. Il est même possible que l'écart type « trimestriel » $s(Y)$ soit inférieur à *chacun* des écarts types $s(X_i)$: la classe, alors, est plus unie au rendez-vous de fin de trimestre qu'elle ne l'a jamais été au cours du trimestre ! Une classe n'est pas une somme d'individus.

4. Plusieurs observations peuvent être faites. La première, c'est que, ce qui réduit l'écart type et, donc, accroît la cohésion de la classe, ce sont les *« élèves fluctuants »*, ceux qui ont tantôt de bonnes, tantôt de moins bonnes notes, tantôt des mauvaises, tantôt des moins mauvaises notes. D'une manière paradoxale seulement en apparence, ces élèves, dont le comportement irrégulier peut irriter, *œuvrent ainsi à l'unité de la classe*.

5. La seconde observation fournit au professeur une *variable de commande* pour mieux rassembler la classe. Afin de contrôler « à la source » l'écart type de chaque X_i, il convient de composer le « devoir » donnant lieu à la note X_i de *plusieurs volets assez différents* (en pensant aux diverses « espèces » d'élèves de la classe), afin que la note s'écrive comme une somme $X_i = Z_{i1}+Z_{i2}+\ldots$, les séries de notes partielles $Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots$ étant *faiblement corrélés* entre elles. *(À suivre)*

Statistique / statistiques

Il y a un problème ancien et durable de la culture commune avec la statistique et les statistiques. Or les statistiques et la statistique – ce complexe de savoirs qui permet de constituer et de « faire parler » les statistiques – sont indispensables pour mieux organiser et davantage maîtriser notre rapport aux mondes naturels et sociaux en vue de la connaissance vraie de ces mondes et de l'action juste sur eux et en eux. Contre une commune propension à nous laisser abuser par la croyance en des régularités trop simples pour être vraies ou, au contraire, à donner crédit à une prétendue absence de loi quand une forme plus subtile de loi s'impose subrepticement, les statistiques et la statistique permettent de construire, à coût non nul, il est vrai, des « milieux » qui informent et rectifient avec bonheur nos façons de penser et nos manières d'agir.

• On examine ici quelques aspects des résultats de l'épreuve d'orientation qu'ont subie le 29 juin dernier les étudiants qui constitueront, aux démissionnaires près, la promotion 2004-2005 des élèves professeurs de mathématiques de 1re année à l'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille. L'épreuve proposée se composait de trois problèmes, le premier de modélisation (utilisant surtout des outils élémentaires de géométrie), le deuxième d'algèbre et d'arithmétique, le troisième d'analyse. On en trouvera l'énoncé sur le site Internet de l'IUFM, à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl1/annales.html. Les notes assignées aux 138 présents ont été les suivantes : 1 ; 3 ; 3 ; 5,5 ; 6 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11,5 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12,5 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13,5 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 16 ; 16 ; 16 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17,5 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 23 ; 23 ; 23 ; 23,5 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 25 ; 25 ; 25 ; 26 ; 26 ; 26 ; 26 ; 26 ; 26 ; 27 ; 27 ; 27,5 ; 28 ; 28,5 ; 28,5 ; 29 ; 29 ; 29,5 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 31 ; 31 ; 31 ; 31 ; 31 ; 32 ; 32 ; 32 ; 33 ; 33 ; 34 ; 34 ; 35 ; 35 ; 35 ; 36 ; 36 ; 38 ; 38 ; 39 ; 39 ; 41 ; 44 ; 45 ; 46 ; 52. Dans la perspective de la préparation au CAPES 2005, on peut s'interroger sur la structure de cet ensemble de notes. La distribution des notes attribuées est-elle à peu près uniforme, c'est-à-dire montre-t-elle une forte hétérogénéité ? Ou au contraire fait-elle apparaître des groupes assez marqués ? Dans ce dernier cas, combien de groupes ? Un, deux, trois ? Selon les réponses, l'organisation de la préparation et l'organisation du travail à l'intérieur de chaque dispositif de formation qui la compose pourront en être changées.

• Pour répondre à l'interrogation précédente, on peut représenter graphiquement les différents effectifs des valeurs x_i ($1 \leq i \leq 139$) après avoir regroupées ces valeurs en classes, par exemple [0 ; 5[, [5 ; 10[, …, [50 ; 55[. En utilisant – de manière évidente – un traitement de texte (dans la suite, on supposera qu'il s'agit de Word 97), on obtient en effet le « diagramme » suivant.

1 ; 3 ; 3

5,5 ; 6 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9

11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11,5 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12,5 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13,5 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14

15 ; 15 ; 15 ; 16 ; 16 ; 16 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17,5 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 19 ; 19 ; 19 ;19 ; 19 ; 19 ; 19

20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ;22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 23 ; 23 ; 23 ; 23,5 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24

25 ; 25 ; 25 ; 26 ; 26 ; 26 ; 26 ; 26 ; 26 ; 27 ; 27 ; 27,5 ; 28 ; 28,5 ; 28,5 ; 29 ; 29 ; 29,5

30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 31 ; 31 ; 31 ; 31 ; 31 ; 32 ; 32 ; 32 ; 33 ; 33 ; 34 ; 34

35 ; 35 ; 35 ; 36 ; 36 ; 38 ; 38 ; 39 ; 39

41 ; 44

45 ; 46

52

Cette représentation graphique fait apparaître une distribution « en cloche » relativement symétrique par rapport à la *classe modale* (celle de plus grand effectif), à savoir [20 ; 25[. La *médiane m* est, en principe, l'un quelconque des réels compris entre la 69^e et la 70^e valeurs : on prend usuellement le *milieu* de l'intervalle [x_{69} ; x_{70}]. Pour déterminer concrètement ces valeurs, on peut à nouveau utiliser le traitement de texte, en procédant ainsi : après avoir sélectionné la série des notes données (à savoir 1 ; 3 ; 3 ; 5,5 ; 6 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11…), on clique sur **Tableau** puis sur **Convertir texte en tableau…** en saisissant 1 dans **Nombre de colonnes:** (et, par exemple, 2 dans **Largeur des colonnes:**). On obtient ainsi un tableau à une colonne et 138 lignes :

1
3
3
5,5
…

On fait ensuite numéroter les lignes du tableau ; il suffit alors de lire les valeurs situées aux 69^e et 70^e rangs :

68. 22
69. 22
70. 22
71. 22

La médiane est ici égale à m = 22. Pour calculer la *moyenne*, on peut *par exemple* utiliser la fonction de sommation du traitement de texte (**Tableau** / **Formule** / **Insérer la fonction:** SOMME), sans même utiliser le tableau obtenu précédemment, mais après avoir scindé la série en deux sous-séries plus courtes (de 1 à 82 et de 83 à 138 par exemple). On obtient ainsi pour sommes partielles 1359 et 1765, soit un total de 3124. La moyenne est donc égale à $\bar{x}$ = 3124/138 = 22 + 44/69 = 22,637681159420289855072463… ≈ 22,64. Les positions relatives de la moyenne et de la médiane confirment une faible asymétrie de la distribution. Pour contrôler ce fait, on peut élaguer la série en lui retirant ses p plus petites et ses p plus grandes valeurs : pour p = 3, on obtient $\bar{x}_{/3} \approx 22{,}53$; pour p = 6, $\bar{x}_{/6} \approx 22{,}46$; pour p = 9, $\bar{x}_{/9} \approx 22{,}42$: l'écart de la moyenne à la médiane diminue faiblement ; il ne tient donc pas seulement aux valeurs extrêmes de la série.

• Pour l'examen auquel on a procédé, on peut aussi employer un outil plus spécifique. On prend ici l'exemple du tableur Excel 97. On suppose qu'on a placé les 138 valeurs dans les cellules D2 à D139 d'une feuille de calcul. On va alors sélectionner **Outils** puis **Utilitaire d'analyse…** (si cette rubrique n'apparaît pas, sélectionner **Macros complémentaires…** et y cocher **Utilitaire d'analyse**). Dans **Utilitaire d'analyse…** on sélectionne **Statistiques descriptives** ; il faut alors 1) dans **Plage d'entrée**, saisir D2:D139 ; 2) dans **Groupées par:**, cocher Colonnes ; 3) dans **Plage de sortie:**, saisir (par exemple) G2 ; 4) enfin cocher **Rapport détaillé**. Dès qu'on valide ces choix (en cliquant sur OK), la table ci-après apparaît.

Colonne1	
Moyenne	22,6376812
Erreur-type	0,79217799
Médiane	22
Mode	22

Écart-type	9,30598428
Variance de l'échantillon	86,6013435
Kurstosis (Coefficient d'applatissement)	0,24478331
Coefficient d'assymétrie	0,31544665
Plage	51
Minimum	1
Maximum	52
Somme	3124
Nombre d'échantillons	138

Il convient d'abord de toiletter un peu ce tableau en y remplaçant « *kurstosis* » par « *kurtosis* », « *applatissement* » par « *aplatissement* », « *assymétrie* » par « *asymétrie* ». Cela supposé fait, précisons rapidement les paramètres qu'il propose, au-delà de la médiane m et de la moyenne $\bar{x}$. Le *mode*, on le sait, est la valeur dont l'effectif est le plus grand. L'*erreur type* (en anglais *standard error*) est égale à $\frac{s}{\sqrt{n}}$ où s est l'écart type de la série et n sa taille (ici, n = 138). L'*écart type* (en anglais *standard deviation*) est un paramètre classique défini en général comme la racine carrée de la *variance* $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Ici, en réalité, la variance est définie par $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2$; l'écart type est donc donné par $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ (et l'erreur type par $\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$). Notons encore que le logiciel Excel utilisé nomme « Plage » ce qu'on appelle plus usuellement *étendue*, ou *amplitude*, ou *empan*, etc., et qui est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur (anglais : *range*). Le *coefficient d'aplatissement* est appelé, en anglais, (degré de) *kurtosis* (du grec *kurtos*, « arrondi, convexe »), mot introduit en 1905 par Karl Pearson (1857-1936). En principe, on appelle coefficient de Pearson (pour l'aplatissement) le nombre $\beta_2 = \frac{m_4}{s^4}$, où m_4 est le moment centré d'ordre 4, le moment centré d'ordre k étant défini par $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^k$ et on nomme coefficient de Fisher (bien que ce coefficient ait été proposé d'abord par… Pearson) le nombre $\gamma_2 = \beta_2 - 3$: une distribution à peu près normale a en effet un β_2 proche de 3. Le logiciel Excel adopte en fait pour valeur du *kurtosis* $\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$. (Pour le connaisseur : comme pour la variance, Excel calcule ici un *estimateur sans biais*, en supposant que les données examinées constituent un échantillon extrait d'une population plus vaste.) Ici, la distribution est plus « pointue » que la distribution normale : on dit qu'elle est « *leptocurtique* » (elle serait dite « *platicurtique* » si elle était plus aplatie que la distribution normale) ; on a donc confirmation de l'image fournie par le « diagramme en bâtons » obtenu plus haut : la distribution est bien groupée autour de ses valeurs centrales, et l'hypothèse d'un éclatement en plusieurs groupes différenciées est donc à rejeter. On observera, pour conforter cette conclusion, que, entre $\bar{x} - s \approx 13{,}3$ et $\bar{x} + s \approx 31{,}9$ se trouvent 110 des 138 notes, soit près de 80 % de ces notes. Le *premier quartile* – défini en principe, au lycée, comme « le plus petit élément q des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à q » – vaut ici 17 ; le troisième quartile – défini de même comme « le plus petit élément *q'* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à *q'* » – est égal à 29,5. L'*écart interquartile*, différence entre les 3[e] et 1[er] quartiles, vaut ainsi 12,5, soit *moins du quart* de l'étendue ! Quant au *coefficient d'asymétrie*, il est en principe donné par $\gamma_1 = \frac{m_3}{s^3}$ (coefficient de Fisher), mais le logiciel Excel prend en fait pour coefficient d'asymétrie $\frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)^3$ (pour les *litterati*, même remarque qu'à propos de la variance et du *kurtosis*). Si $\gamma_1 > 0$, il y a étalement à droite : c'est le cas ici, comme on peut l'observer sur le diagramme en bâtons.

• On peut tout de même rechercher dans la population des notes l'effet d'un facteur dont on peut penser *a priori* qu'il ne laisse pas les formateurs indifférents : le fait d'avoir déjà suivi la préparation au CAPES ! Les renseignements administratifs disponibles permettent en l'espèce de distinguer entre les candidats déjà inscrits à l'IUFM d'Aix-Marseille en 2003-2004 pour préparer le CAPES de mathématiques mais qui n'ont pas été admissibles au CAPES 2004 (les admissibles sont dispensés de l'épreuve) et les candidats qui demandent à suivre cette préparation en principe pour la première fois. Les deux sous-populations se distinguent-elles par leurs notes ? La réponse n'est pas bien difficile à donner. La population des « seniors » a un effectif de 33 ; les notes sont les suivantes : 12 ; 12 ; 13 ; 17 ; 18 ; 19 ; 19 ; 20 ; 20 ; 22 ; 22 ; 23 ; 24 ; 24 ; 25 ; 26 ; 26 ; 26 ; 26 ; 27 ; 29,5 ; 30 ; 30 ; 31 ; 31 ; 31 ; 32 ; 32 ; 32 ; 34 ; 38 ; 38 ; 41. La population des « juniors » a un effectif de 105, et ses notes sont celles-ci : 1 ; 3 ; 3 ; 5,5 ; 6 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11,5 ; 12 ; 12 ; 12,5 ; 13 ; 13 ; 13,5 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 16 ; 16 ; 16 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17,5 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 23 ; 23 ; 23,5 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 25 ; 25 ; 26 ; 26 ; 27 ; 27,5 ; 28 ; 28,5 ; 28,5 ; 29 ; 29 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 31 ; 31 ; 33 ; 33 ; 34 ; 35 ; 35 ; 35 ; 36 ; 36 ; 39 ; 39 ; 44 ; 45 ; 46 ; 52. La moyenne des seniors est supérieure à 25,7 ; celle des juniors, inférieure à 21,7 ; la médiane est, pour les premiers, 26, pour les seconds, 21. Les diagrammes ci-après permettent une appréhension globale des deux sous-populations.

	1 ; 3 ; 3
	5,5 ; 6 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9
12 ; 12 ; 13	11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11,5 ; 12 ; 12 ; 12,5 ; 13 ; 13 ; 13,5 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14
17 ; 18 ; 19 ; 19	15 ; 15 ; 15 ; 16 ; 16 ; 16 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17,5 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19
20 ; 20 ; 22 ; 22 ; 23 ; 24 ; 24	20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 21 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 22 ; 23 ; 23 ; 23,5 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24 ; 24
25 ; 26 ; 26 ; 26 ; 26 ; 27 ; 29,5	25 ; 25 ; 26 ; 26 ; 27 ; 27,5 ; 28 ; 28,5 ; 28,5 ; 29 ; 29
30 ; 30 ; 31 ; 31 ; 31 ; 32 ; 32 ; 32 ; 34	30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 31 ; 31 ; 33 ; 33 ; 34
38 ; 38	35 ; 35 ; 35 ; 36 ; 36 ; 39 ; 39
41	44
	45 ; 46
	52

Les « seniors » Les « juniors »

Les notes des juniors sont davantage étalées à droite que l'ensemble des notes : le coefficient d'asymétrie donné par le logiciel Excel est dans leur cas proche de 0,49 alors qu'il était inférieur à 0,24 pour la population tout entière. En revanche, ce coefficient est égal à presque – 0,4 pour les notes des seniors : il y a cette fois « étalement à gauche » des notes, ce qu'on pouvait espérer !

Toute question concernant *Excursus* doit être envoyée à l'adresse suivante : excursus.mat@aix-mrs.iufm.fr.