Courbes & courbes…

Dans le bulletin officiel (programme de 2^de^), il est écrit dans la section « Étude qualitative de fonctions. Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle » : « S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique ». Je ne comprends pas tout à fait à quoi il est fait allusion. Est-ce qu'ils font référence au fait que, pour certaines courbes du style  la calculatrice « écrase » la partie centrale, c'est-à-dire renvoie le graphe suivant :  ? (PS, novembre 2001)

Matériaux pour une réponse

1. Non. Pour voir ce dont il s'agit, reprenons du début.

① Une fonction f étant donnée par son expression analytique, ***« l'étude de f »*** consistait autrefois en un ensemble de gestes (étude des variations, déterminations de quelques points, dont les extrémums, ainsi que des tangentes correspondantes, etc.) qui culminait dans le tracé de la ***représentation graphique*** f.

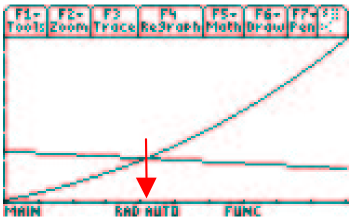
② Classiquement, la représentation graphique, qui était le point terminal de l'étude de la fonction, ***ne servait à rien***. Plus anciennement, pourtant, elle servait en principe à résoudre des équations et inéquations par le ***« calcul graphique »***.

❶ Il fallait alors, pour cela, que la courbe représentative soit une ***épure*** (et non un tracé qualitativement correct mais quantitativement approximatif).

❷ Ainsi, pour résoudre graphiquement les équations du type $x^3+px+q = 0$ (auxquelles se ramène ***toute*** équation de degré 3), on ***tabule*** une fois pour toutes l'application $x \mapsto x^3$, comme ci-après.

x	x^3
1,4	2,74
1,41	2,80
1,42	2,86
1,43	2,92
1,44	2,99
1,45	3,05
1,46	3,11
1,47	3,18
1,48	3,24
1,49	3,31
1,5	3,38

Pour résoudre l'équation $x^3+px+q = 0$, il suffit alors de tracer la courbe $\mathcal{C}_3$ représentative de $x \mapsto x^3$, puis la droite $\mathcal{D}_{p,q}$ d'équation $y = -px-q$, enfin de lire l'abscisse de l'intersection de $\mathcal{C}_3$ avec $\mathcal{D}_{p,q}$. Ainsi, pour $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ on construit sur du papier finement quadrillé la courbe $\mathcal{C}_3$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -0,75x+2,75\sqrt{2}$, ou plutôt la droite $\mathcal{D}^*$ d'équation $y = -0,75x+3,89$ ($2,75\sqrt{2} \approx 3,89$). (De façon anachronique, on a réalisé l'opération, ci-après, avec une calculatrice graphique.)



Il ne reste plus alors qu'à « lire » la solution x^* par ***« interpolation à vue »*** : $x^* \approx 1{,}41$. (En fait, on a $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ pour $x = \sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$)

❸ Pour résoudre les équations du second degré $x^2+px+q = 0$ on peut, de même, opérer graphiquement par l'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ avec la droite $y = -px-q$, ou encore par l'intersection de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ avec la droite $y = -\frac{1}{q}x - \frac{p}{q}$ (ce qui pose le problème de la division par q).

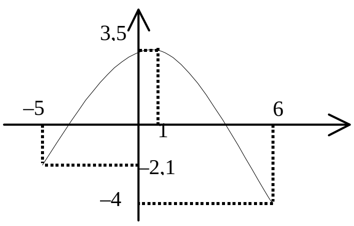
2. Cela rappelé, parmi les ***« capacités attendues »***, le programme de 2de mentionne les deux suivantes, réciproques l'une de l'autre en quelque sorte :

Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.

C'est en ce point que prend place le passage cité dans la question examinée ici :

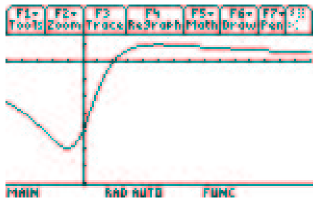
« S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. »

① Dans le cas où la « courbe » apporte une « information exhaustive » sur les variations de la fonction, le passage de la « courbe » au tableau de variation n'est en fait qu'un changement de ***code graphique*** : il n'y a pas plus dans la courbe qu'il n'y a dans le tableau de variation ; la courbe n'est qu'une expression graphique plus proche par l'apparence de la réalité représentée. Sur le schéma ci-contre, par exemple, on ***voit*** que $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de 3,5 à –4 quand x croît de 1 à 6. En vérité, le schéma ***n'est qu'une autre manière de dire*** ce qui vient d'être indiqué. Il s'agit donc purement et simplement d'apprendre à décoder les informations qui s'y expriment, et inversement à coder sous la forme d'un tel schéma les informations apportées par un tableau de variation ou sous forme discursive (comme ci-dessus : « $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de… »).



② Dans le cas où la « courbe » est « obtenue sur un écran graphique », les choses sont ***très différentes***. Le tableau de variation, en effet, modélise, non sans incertitude éventuelle, une réalité graphique « empirique », qui apporte des informations partielles sur la fonction f étudiée.

❶ Supposons que l'on étudie la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle [–5, 15]. Une calculatrice graphique livre par exemple le tracé ci-contre du graphe de f.



On peut traduire le comportement observé par la ***conjecture*** suivante : f décroît d'abord sur $[-5, \alpha]$, où $\alpha \approx -1$, puis croît sur $[\alpha, \beta]$, où $\beta \approx 5$, enfin décroît sur $[\beta, 15]$. Il resterait alors à vérifier qu'il en est bien ainsi, opération pour laquelle on ne dispose, en 2$^{\text{de}}$, que d'***outils rudimentaires***, mais néanmoins utilisables, ainsi qu'on va le voir.

❷ Soit a, $b \geq 5$, avec $a < b$; tentons d'établir que $f(a) > f(b)$, c'est-à-dire que $\dfrac{a-2}{a^2+5} > \dfrac{b-2}{b^2+5}$. On a successivement : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow (a-2)(b^2+5) > (b-2)(a^2+5) \Leftrightarrow ab^2 + 5a - 2b^2 - 10 > a^2b + 5b - 2a^2 - 10 \Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0 \Leftrightarrow ab - 5 - 2(a+b) > 0$. Pour $a \geq 5$, on a :

$$ab-5-2(a+b) \geq 5b-5-2(a+b).$$

Il vient $5b-5-2(a+b) = 3b-5-2a = (b-5)+2(b-a) > 0$ et donc $ab - 5 - 2(a+b) > 0$, comme espéré. On a ainsi établi que f est strictement décroissante sur [5, 15].

③ Qu'est-ce qui motive l'étude des variations d'une fonction sur un intervalle ? Une réponse classique, liée à ce qu'on appelait autrefois les ***« problèmes de maxima et de minima »***, est que c'est là une voie – qui n'est pas la seule ni nécessairement la plus directe – pour déterminer les ***extrémums*** d'une fonction.

❶ On peut par exemple avoir à chercher quel est le maximum (s'il existe) de la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On sait déjà que $f(5) > f(b)$ pour $b > 5$. Reprenons alors le travail sur l'inégalité $f(a) > f(b)$. On a : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0$. Faisons $a = 5$, et supposons $b < 5$. Il vient : $f(5) > f(b) \Leftrightarrow 5b - 5 - 2(b+5) < 0 \Leftrightarrow 3b - 15 < 0 \Leftrightarrow b < 5$. On obtient ainsi que $f(5) > f(b)$ sur $[0, 5[$: f atteint donc son maximum sur $[0,+\infty[$ en 5.

❷ On saisit mieux alors l'intérêt de l'étude préalable des variations d'une fonction f : dispenser d'études locales multiples. Pour la fonction f déjà examinée, par exemple, les égalités (♣), (♦), (♥) ci-après justifient respectivement les comportements de f conjecturés sur [5, 15], [–1, 5], [–5, –1] :

$$\begin{aligned} f(a)-f(b) &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[ab-5-2(a+b)] = \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[(a-5)b+(b-5)+2(b-a)] \quad (\clubsuit) \\ &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[(b-5)(a+1)+3(a-b)] \quad (\blacklozenge) \\ &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[a(b+1)-3(a+1)-2(b+1)] \quad (\heartsuit) \end{aligned}$$